PENGEMBANGAN TEORI PERSAMAAN DIFERENSIAL UNTUK MENINGKATKAN CARA BERFIKIR KRITIS MAHASISWA PENDIDIKAN MATEMATIKA

Oleh
Dame Ifa Sihombing
Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas HKBP Nommensen, Jl. Sutomo 4A Medan
Email:damesihombing@uhn.ac.id

Abstrak

Artikel ini bertujuan untuk menyajikan solusi persamaan diferensial Cauchy Euler homogen dari akar persamaan karakteristiknya. Kesulitan dalam menyelesaikan persoalan analisa dan aljabar mengakibatkan kelambatan dalam pengajaran dan pembelajaran.Dengan menemukan persamaan karakteristik dalam bentuk persamaan polinomial berderajat n, maka persamaan diferensial Cauchy Euler dapat diselesaikan dengan mudah. Kemampuan berfikir kritis sangat diperlukan dalam menganalisa dan mengkonsep proses pembelajaran teori ini, oleh karena itu model pembelajaran discovery diperlukan dalam pengembangan teori tersebut. Dengan demikian hasil yang diperoleh dapat membangkitkan penelitian lain tentang Persamaan Cauchy Euler secara abstraksi matematika dan aplikasinya.

Kata Kunci :Persamaan diferensial, Persamaan diferensial Cauchy Euler, Persamaan Karakteristik, Berfikir Kritis.

I. PENDAHULUAN

Pada permasalahan penyelesaian persoalan matematika, mahasiswa dituntut untuk dapat memahami bentuk persoalan, mengembangkan solusi, mengimplementasikan solusi, dan mengevaluasi hasil matematika. Hal ini terkait dengan kemampuan cara berfikir kritis yang harus dimiliki pada permasalahan penyelesaian soal matematika. Langkah-langkah penyelesaian soal matematika menjadi prioritas utama dosen dalam memberikan strategi atau solusi penyelesaian matematika kepada mahasiswa. Kemampuan berfikir tingkat tinggi (High Order Thinking Skills – HOTS) mencakup berfikir dasar, berfikir kreatif dan berfikir kritis. Kemampuan berifikir kritis sangat dibutuhkan pada era abad 21 ini [1]. Terdapat delapan hal pokok terkait dengan cara berfikir kritis, yaitu menguji, menghubungkan, mengevaluasi setiap aspek persoalan, fokus pada bagian persoalan, menemukan dan menyusun informasi, validasi, mengingat, menentukan jawaban, merepresentasikan kesimpulan yang valid dan mengarahkan analisa berfikir. Mahasiswa dapat dikatakan mampu berfikir kritis jjka mampu menyelesaikan persoalan yang diperoleh dari proses pengajaran dan proses pembelajaran [2].

Berdasarkan jenis-jenis kemampuan berfikir yang telah dikaji oleh para ahli, maka ditemukan bahwa berfikir kritis menjadi salah satu tujuan utama dari belajar. Disamping itu, berfikir kritis memainkan peran penting pada berbagai jenis pekerjaan, terutama pada pekerjaan yang membutuhkan ketepatan dan analisa berfikir.

Pendapat ini juga sejalan dengan tujuan pembelajaran matematika, yaitu agar mahasiswa dapat menggunakan matematika sebagai cara menalar (berpikir logis, kritis, sistematis, dan objektif) kemudian dapat digunakan untuk memecahkan masalah, baik dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam pembelajaran berbagai bidang ilmu. Berpikir kritis sangat dibutuhkan dalam kehidupan sehari-hari karena manusia selalu dihadapkan pada permasalahan yang membutuhkan solusi. [3] Untuk memecahkan suatu masalah, diperlukan data dan analisa agar menemukan keputusan yang logis. Selain itu, untuk membuat keputusan yang tepat, mahasiswa harus memiliki kemampuan berpikir kritis yang baik. Sementara mahasiswa mengembangkan keterampilan berpikir kritis, mereka secara aktif terlibat dalam proses pembelajaran. Berbagai elemen pembelajaran, seperti belajar mandiri, belajar kolektif, belajar pasif, dan belajar aktif, memiliki tempat sebagai bagian dari rangkaian dalam memperkuat mereka untuk mengembangkan pemikiran kritis mereka. Pengembangan berpikir kritis siswa harus diberikan secara berulang-ulang dengan menggunakan media pembelajaran selama mereka mempelajari suatu materi.

Salah satu materi (mata kuliah) pada program studi Pendidikan matematika adalah Persamaan Diferensial. Materi ini dipilih karena dapat mengembangkan kemampuan berfikir kritis mahasiswa, konsep pembelajaran yang diberikan bersifat prosedural dan analitis.

Menyelesaikan persamaan diferensial berarti menemukan sekumpulan kurva-kurva yang memenuhi persamaan tersebut. Penerapan persamaan diferensial dalam kehidupan sehari-hari sangat luas seperti fenomena alam dari bentuk fisika menjadi biologi, bidang farmasi dan Teknik dan bidang sains lain nya. Solusi persamaan diferensial ini digunakan untuk mendesain konstruksi bangunan dan jembatan, mengidentifikasi pertumbuhan populasi, arus listrik dan lain-lain.

Bentuk umum dari persamaan diferensial adalah $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$ menggambarkan objek yang sangat luas terkait dengan matematika dan sangat penting untuk digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Kajian spesifik dari materi persamaan diferensial ini adalah persamaan diferensial Cauchy Euler.

Model yang akan digunakan adalah model pembelajaran Discovery. Menurut Bloom, keterampilan berfikir tingkat tinggi berupa keterampilan menganalisis, mengevaluasi, dan mencipta.

Maka tujuan dari penelitian ini adalah mengembangkan solusi dari bentuk umum persamaan diferensial yang dikenal dengan nama persamaan Cauchy Euler yang diambil dari karakteristik akar-akar persamaannya. Selanjutnya akan disebut sebagai Persamaan diferensial Cauchy Euler Homogen order – n.

II. LANDASAN TEORI

PERSAMAAN DIFERENSIAL

Persamaan diferensial merupakan persamaan matematika untuk fungsi yang terdiri dari satu variabel atau lebih dimana nilai fungsi akan dihubungkan dengan turunannya dalam berbagai orde. [4] Persamaan diferensial pertama kali dipakai pada bidang kalkulus oleh Newton dan Leibniz dengan membuat bentuk umum persamaan diferensial yaitu

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2}$$

$$x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} = y \tag{3}$$

Kemudian Jacob Bernoulli menyederhanakan persamaan tersebut menjadi :

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \tag{4}$$

Dan oleh Leibniz maka ditemukan penyelesaiannya dan penyederhanaannya.

HOTS (High Order Thinking Skill) Keterampilan berpikir tingkat tinggi (HOTS) adalah kemampuan berpikir yang menerapkan pengolahan dalam kegiatan mengingat, menyatakan kembali, atau merujuk sesuatu hal. Menurut Ariyana [5] keterampilan berpikir tingkat tinggi dipicu oleh empat kondisi berikut: a) Sebuah situasi belajar tertentu yang memerlukan strategi pembelajaran yang spesifik dan tidak dapat digunakan di situasi belajar lainnya. b) Kecerdasan yang tidak lagi dipandang sebagai kemampuan yang tidak dapat diubah, melainkan kesatuan pengetahuan yang dipengaruhi oleh berbagai faktor yang terdiri dari lingkungan belajar, strategi, dan kesadaran dalam belajar. c) Pemahaman pandangan yang telah bergeser dari unidimensi, linier, hirarki atau spiral menuju pemahaman pandangan ke multidimensi dan interaktif. d) Keterampilan berpikir tingkat tinggi yang lebih spesifik seperti penalaran, kemampuan analisis, pemecahan masalah, dan keterampilan berpikir kritis dan kreatif."

MODEL PEMBELAJARAN DISCOVERY

Modelpembelajaran penyingkapan/penemuan (Discovery/inquiry Learning) adalah memahami konsep, arti, dan hubungan melalui proses intuitif untuk akhirnya sampai kepada suatu kesimpulan. Discovery terjadi bila individu terlibat terutama dalam penggunaan proses mentalnya untuk menemukan beberapa konsep dan prinsip.

Discovery dilakukan melalui observasi, klasifikasi, pengukuran, prediksi, penentuan dan inferensi. Proses tersebut disebut cognitive process sedangkan discovery itu sendiri adalah *the mental process of assimilating concepts and principles in the mind* [6].

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

PERSAMAAN DIFERENSIAL CAUCHY EULER HOMOGEN

[7] Teori fungsi analitik dan metode untuk menentukan akar-akar bilangan riel. Bentuk Persamaan diferensial Cauchy Euler homogen orde ke n sebagai berikut :

$$A_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots A_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + A_1 x \frac{dy}{dx} + A_0 y = 0\,, \qquad (5)$$

dimana $A_n, A_{n-1}, \cdots, A_2, A_1$ and A_0 konstanta.

Pada bentuk persamaan (5) solusi untuk persamaan turunan pertama dikalikan dengan *x*, turunan kedua dikalikan dengan x^2, turunan ke tiga dikalikan dengan x^3, begitu seterusnya sampai turunan ke *n* akan dikalikan x^n sehingga menghasilkan fungsi awal berbentuk linier. Fungsi demikian dinyatakan sebagai

$$y = x^m, \qquad (6)$$

dengan *m* adalah konstanta riel.

ANALISA JENIS PENYELESAIAN PERSAMAAN CAUCHY EULER

Untuk menyelesaikan persamaan Cauchy Euler dengan bentuk

$$Ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + Bx \frac{dy}{dx} + Cy = 0 \qquad (7)$$

terlebih dahulu dicari persamaan yang berbentuk $y = x^m$, kemudian dengan mensubstitusi (6) ke (5) maka diperoleh

$$Ax^2 m(m-1) + Bxmx^{m-1} + Cx^m = 0 \quad (8)$$

Oleh karena itu $Am(m-1) + Bm + C = 0$ $\therefore\ Am^2 + (B-A)m + C = 0$ kemudian bentuk ini akan dinyatakan sebagai persamaan karakteristik yang berkaitan dengan persamaan Cauchy Eluer tipe $Ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + Bx\frac{dy}{dx} + Cy = 0$.

Solusi dari Persamaan Diferensial Biasa ini bergantung pada akar-akar dari Persamaan yang terkait. Terdapat tiga kasus untuk solusi karakteristik persamaan diatas :

Kasus I. Jika akar-akar riel yang berbeda

Andaikan α dan β adalah akar-akar persamaan karakteristik, maka solusi dari persamaan Cauchy Euler akan berbentuk

$y = C_1x^a + C_2x^\beta$, dimana C_1 dan C_2 adalah konstanta sembarang

Kasus II. Jika akar-akar riel dan sama

Andaikan $\alpha = \beta$ adalah akar-akar persamaan karakteristik, maka solusi dari persamaan Cauchy Euler akan berbentuk

$y = C_1x^a + C_2x^a$ In x, dimana C_1 dan e C_2 adalah konstanta sembarang.

Kasus III. Jika akar-akar kompleks.

Andaikan akar-akar persamaan karakteristik berbentuk kompleks, maka solusi dari persamaan Cauchy Euler akan berbentuk

$$y = x^a\left[C_1cos\left(\text{In}\left(x^\beta\right)\right) + C_2sen\left(\text{In}\left(x^\beta\right)\right)\right],$$

dimana C_1 and C_2 adalah konstanta sembarang.

Beberapapersamaan Karakteristik Yang Berkaitan Dengan Persamaan Cauchy Euler

Pada bagian ini untuk setiap persamaan Cauchy Euler Homogen orde ke -n, akan ditunjukkan bagaimana persamaan karakteristik menjadi persamaan polinomial derajat ke-n.

1. $Ax\frac{dy}{dx} + By = 0 \rightarrow Am + B = 0$

2. $Ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + Bx\frac{dy}{dx} + Cy + 0 \rightarrow Am^2 + (B - A)m + C = 0$

3. $Ax^3\frac{d^3y}{dx^3} + Bx^2\frac{d^2y}{dx^2} + Cx\frac{dy}{dx} + Dy = 0 \rightarrow Am^3 + (B - 3A)m^2 + (2A - B + C)m + D = 0$

4. $Ax^4\frac{d^4y}{dx^4} + Bx^3\frac{d^3y}{dx^3} + Cx^3\frac{d^3y}{dx^3} + Dx\frac{dy}{dx} + Ey = 0 \rightarrow Am^4 + (B - 6A)m^3 + (11A - 3B + C)m^2 + (2B - 6A - C + D)m + E = 0$

5. $Ax^3\frac{d^5y}{dx^3} + Bx^4\frac{d^4y}{dx^3} + Cx^3\frac{d^3y}{dx^3} + Dx^2\frac{d^2y}{dx^2} + Ex\frac{dy}{dx} + Fy = 0 \rightarrow Am^5 + (B - 10A)m^4 + (35A - 6B + C)m^3 + (11B - 50A - 3C + D)m^2 + (24A - 6B + 2C - D + E)m + F$

Beberapa Contoh

1. Diberikan persamaan Cauchy Euler $5x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$, persamaan karakteristiknya $5m - 3 = 0$. Oleh karena itu akar persamaan $m = \frac{3}{5}$, sehingga solusi nya $y = C_1x^{-\frac{3}{5}}$
2. Diberikan persamaan Cauchy Euler $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 2y = 0$, persamaan karakteristiknya $m^2 + m + C = 0$. Oleh karena itu akar-akar nya $m_1 = -2$ dan $m_2 = 1$, sehingga solusi nya $y = C_1x^{-2} + C_2x$
3. Diberikan persamaan Cauchy Euler $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$, persamaan karakteristiknya $m^3 - m^2 -$

$m + 1 = 0$ dengan akar-akar $m_1 = -1$, $m_2 = 1$, dan $m_3 = 1$. Sehingga solusinya $y = C_1 x^{-1} + C_2 x + C_3 x \text{ In } x$

4. Diberikan persamaan Cauchy Euler $x^4 \frac{d^4y}{dx^4} + 3x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + 4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 8x \frac{dy}{dx} + 8y = 0$, persamaan karakteristiknya $m^4 - 3m^3 + 6m^2 - 12m + 8 = 0$ dengan akar-akar $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 2i$ dan $m_4 = 2i$. Sehingga solusinya $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 \text{Cos}(\text{In}(x^2)) + C_4 sin\left(\text{In}(x^2)\right)$
5. Diberikan persamaan Cauchy Euler $x^5 \frac{d^5y}{dx^5} + 8x^4 \frac{d^4y}{dx^4} + 23x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 30x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 10x \frac{dy}{dx} - 10y = 0$. Maka persamaan karakteristiknya $m^5 - 2m^4 + 10m^3 - m^2 + 2m - 10 = 0$, dengan akar-akar $m_1 = 1$, $m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $m_4 = 1 - 3i$ dan $m_5 = 1 + 3i$. Sehingga solusinya adalah $y = C_1 x + x^{-\frac{1}{2}} \left[C_2 \cos\left(\text{In}\left(x^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \right) + C_3 sen\ (\text{In}\left(x^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \right] + x\left[C_4 \cos(\text{In}(x^3)) + C_5 sin(\text{In}(x^3)) \right]$

KESIMPULAN

Untuk mengembangkan pemahaman yang lebih baik tentang teori dan penyelesaian Persamaan Diferensial Cauchy Euler maka himpunan solusi persamaan diferensial biasa tertentu masih menjadi objek penelitian dengan penerapan yang lebih kompleks. Melalui pengembangan teori tersebut mahasiswa tidak hanya mengevaluasi dan menguraikan konsep, tetapi memeriksa kembali pernyataaan persamaan kemudian bereksperimen, menguji, mendeteksi dan menilai selama proses pembelajaran. Dalam hal ini kemampuan berfikir kritis mahasiswa (HOTS) dicapai dengan menerapkan model pembelajaran Discovery. Hasil yang diperoleh dapat membangkitkan penelitian lain tentang Persamaan Cauchy Euler secara abstraksi matematika dan aplikasinya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Krulik, S., & Rudnick, J. A. 1995., *The New Sourcebook for Teaching Reasoning and Problem Solving in Elementary School*. A Longwood Professional Book. Boston, USA: Allyn & Bacon

[2] Setyawan, F. 2015. Conceptual Understanding Profile of LEOV Junior High School Students Based on Kolb's Learning Style. *International Conference on Mathematics, Science, and Education (ICSME), 61–63.*

[3] Smith, D. G. 1977., College classroom interactions and critical thinking. *Journal of Educational Psychology*, 69(2), 180–190.

[4]Edwards,C.H.&Penney,D.E.,2008., *Elementary Differential Equations*. 6 ed. New Jersey: Pearson Education

[5] Ariyana Y., Pudjiastuti, A.,Bestary, R., Zamroni. 2018., *Buku Pegangan Pembelajaran Berorientasi pada Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi*. Jakarta: Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan

[6] Balim, Ali gunay. 2009. The effect of Discovery Learning on Student's success and inquiry Learning Skills. *Egitim Arastirmalari-Eurasian Journal of Educational Research*. 35: 1-20.

[7] Sabuwala, A. H. & Leon, D. D., 2011. Particular Solution To The Euler–Cauchy Equation With Polynomial Non–Homogeneities. *Discrete And Continuous Dynamical Systems*, pp. 1271-1278.