DIKTAT KULIAH

ANALISA KOMPLEKS

$$\oint f(z)dz$$

Dr. Dame Ifa Sihombing, M.Si

Program Studi Pendidikan Matematika

Universitas HKBP Nommensen Medan

2021

KATA PENGANTAR

Diktat ini disusun dengan tujuan memberikan informasi tentang konsep-konsep dasar yang berhubungan dengan Bilangan Kompleks, Fungsi Kompleks, Transformasi Elementer dan Fungsi Analitik sebagai bahan acuan dalam perkuliahan Analisa Kompleks. Setiap Materi disajikan dalam bentuk defenisi, contoh, teorema dan Latihan dengan tujuan untuk memudahkan mahasiswa memahami materi perkuliahan.

Salah satu syarat agar pembelajaran Analisa Kompleks tercapai, mahasiswa harus sudah mengikuti perkuliahan dan memahami materi pada mata kuliah Analisa Riel. Semoga diktat yang sederhana ini dapat membantu mahasiswa mempelajari dan memahami konsep Bilangan Kompleks. Belajar tidak harus dijelaskan oleh orang lain tetapi belajar secara mandiri dan diskusi sesama teman juga sangat bermanfaat.

Diktat ini masih sangat jauh dari sempurna, oleh karena itu kritik dan saran masih sangat dibutuhkan demi kelanjutan dan sempurna nya diktat ini. Terima Kasih.

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I

BILANGAN KOMPLEKS

1.1 Bilangan Kompleks

Dalam bab ini akan dibicarakan sistem bilangan kompleks yang merupakan perluasan dari sistem bilangan riel. Perhatikan persamaan kuadrat berikut

$$x^2 + 1 = 0!$$

Persamaan kuadrat tersebut tidak memiliki solusi bilangan real. Dalam hal ini solusinya adalah $x = \pm\sqrt{-1}$. Jelas $\sqrt{-1}$ bukan bilangan real karena tidak ada bilangan real yang kuadratnya sama dengan -1. Serupa dengan hal tersebut, persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$ tidak memiliki solusi bilangan real jika $D = b^2\text{-}4ac<1$ sebagai contoh $x^2 - 2x + 5 = 0$ dengan rumus *abc* yang telah dipelajari di SMA solusinya adalah

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

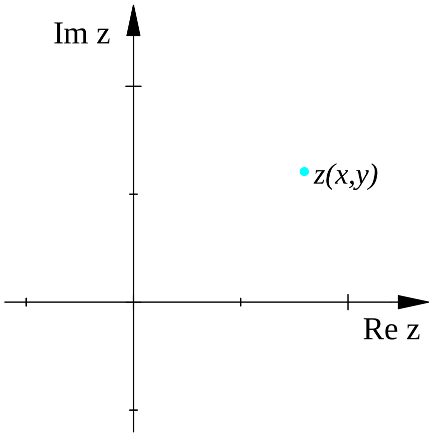
Dalam hal ini, persamaan kuadrat tersebut tidak memiliki solusi dalam sistem bilangan real.

Agar setiap persamaan kuadrat memiliki solusi, kita perlu memperluas sistem bilangan. Sistem bilangan yang dimaksud adalah sistem bilangan kompleks. Lihat kembali solusi persamaan kuadrat di atas! Dalam solusi tersebut terdapat akar bilangan negatif (jelas, akar bilangan negatif bukan bilangan real). Setiap bilangan yang bukan bilangan real disebut bilangan imajiner dengan notasi R^c (komplemen dari R). Anggota bilangan imajiner adalah semua akar bilangan real negatif bersama negatifnya.

Definisi 1.1.1 :

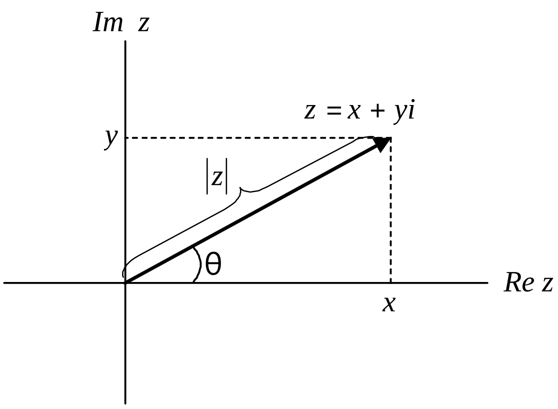
Himpunan bilangan kompleks, dilambangkan sebagai C, adalah himpunan semua bilangan yang dapat dinyatakan sebagai $x + yi$ atau $x + iy$, dengan $x,y \in$ R dan $i = \sqrt{-1}$. Secara formal, C = $\{z = x + yi \mid x,y \in \text{R}, i^2 = -1\}$. Di sini x disebut bagian real z dan dinotasikan sebagai $x = Re(z)$, sedangkan y disebut bagian imajiner z dan dinotasikan dengan $y = Im(z)$. Jika $Re(z) = 0$ maka z dikatakan sebagai bilangan kompleks imajiner murni, sedangkan jika $Im(z) = 0$ maka z merupakan bilangan real.

Bilangan kompleks dinyatakan dalam bentuk $z = x + yi$ atau dapat dipandang sebagai pasangan terurut $(x;y) \in R^2$. Jika bilangan real dapat ditempatkan pada garis lurus, maka bilangan kompleks ditempatkan pada bidang R^2 atau dalam hal ini disebut bidang kompleks (lihat grafik 1).



Grafik 1

Untuk selanjutnya, penyajian bilangan kompleks dalam bidang kompleks dapat dipandang sebagai vektor di R^2 (Lihat Grafik 2). Hal ini mempermudah dalam interpretasi secara geometris.



Grafik 2

Teorema 1.1.2

Sistem bilangan kompleks (**C**, +) merupakan suatu lapangan (field).
Misalkan $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, maka :

1. $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
3. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
4. *Terdapat* $0 \in \mathbb{C}$ *sehingga* $z + 0 = z$ *untuk setiap* $z \in \mathbb{C}$.
5. *Untuk setiap* $z \in \mathbb{C}$ *terdapat* $-z$ *sehingga* $z + (-z) = 0$
6. $z_1.z_2 \in \mathbb{C}$
7. $z_1.z_2 = z_2.z_1$
8. $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$
9. *Terdapat* $1 \in \mathbb{C}$ *sehingga* $z.1 = z$ *untuk setiap* $z \in \mathbb{C}$.
10. *Untuk setiap* $0 \neq z \in \mathbb{C}$ *terdapat* z^{-1} *sehingga* $zz^{-1} = 0$ *(dalam hal ini* $z^{-1} = \frac{1}{z}$*)*
11. $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Definisi 1.1.3

Dalam bentuk pasangan terurut, penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian adalah berturut-turut. Seperti pada himpunan biangan real R, pada himpunan bilangan kompleks C dapat pula didefinisikan operasi-operasi aljabar biner seperti penjumlahan dan perkalian. Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. Hasil penjumlahan bilangan kompleks z_1 dengan z_2 adalah bilangan kompleks $z_3 = z_1 + z_2$ yang didefinisikan sebagai $z_3 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
2. Hasil kali bilangan kompleks z_1 dengan z_2 adalah bilangan kompleks $z_3 = z_1z_2$ yang didefinisikan sebagai $z_3 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.
3. Terdapat bilangan kompleks $-z = -x - yi$ dan $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$ sedemikian sehingga $z + (-z) = (-z) + z = 0$ dan $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$

   (eksistensi elemen invers penjumlahan dan invers perkalian)

4. $z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2$ (sifat distributif)

5. Dengan adanya elemen invers terhadap operasi penjumlahan maupun perkalian, maka dapat didefinisikan operasi pengurangan dan pembagian sebagai berikut. Untuk setiap bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ maka

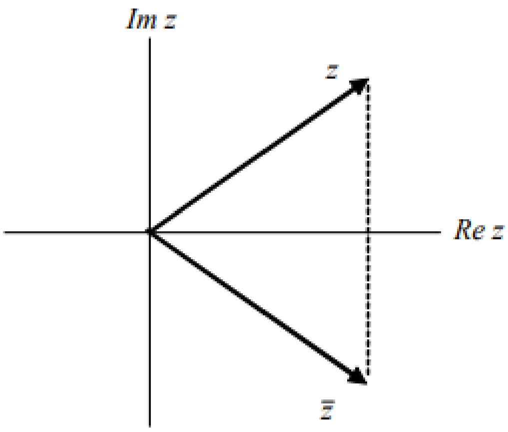
$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

dan

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

1.2 Konjugat dan Modulus Bilangan Kompleks

Salah satu komponen yang penting dalam bilangan kompleks adalah konjugate (*sekawan*). Konjugate bilangan kompleks $z = x+yi$ adalah $\bar{z} = x - yi$ Konjugate $\bar{z}$ tidak lain adalah pencerminan z terhadap sumbu Re z. Secara grafik dapat dilihat sebagai berikut



Grafik 4

Operasi sekawan bersama operasi-operasi biner penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian memiliki sifat-sifat berikut.

Teorema 1.1.4

Diberikan $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Operasi konjugat pada sistem bilangan kompleks adalah

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ dan $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ dan $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. $z\overline{z} = x^2 + y^2$
5. $z + \overline{z} = 2\ Re(z)$
6. $z - \overline{z} = 2i\ Im(z)$

Bukti teorema diatas diserahkan kepada pembaca.

Modulus |z| dari $z = x + yi$ didefinisikan sebagai $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Buku lain menggunakan istilah *magnitude* atau *nilai mutlak*. Sebagai contoh, $|-3 + 4i| = 5$. Jelaslah |z| memberikan arti panjang vektor yang berkorespondensi dengan z . Secara umum, $|z_1 - z_2|$ adalah jarak antara dua titik yang merepresentasikan $z_1\ dan\ z_2$ di bidang. Sifat-sifat modulus terangkum dalam teorema berikut.

Teorema 1.1.5

Untuk setiap bilangan kompleks z dan w, berlaku:

1. $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
2. $|z - w| = |w - z|$
3. $|z|^2 = |z^2| = z\overline{z}$. Jadi jika $z \neq 0$ maka $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
4. $|zw| = |z|\,|w|$
5. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, asalkan $w \neq 0$.
6. $|z + w| \leq |z| + |w|$
7. $||z| - |w|| \leq |z - w|$
8. $|z| - |w| \leq |z + w|$

LATIHAN

1. Nyatakan lah bilangan kompleks berikut dalam bentuk *x+yi* :

   (a) $(5-2i)+(2+3i)$

   (b) $(2+3i)(4-i)$

   (c) $i\bar{i}$

   (d) $\frac{1}{3-2i}$

   (e) $\frac{3+2i}{3-2i}$

   (f) $\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$

   (g) $\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$

   (h) $i^{123}-4i^{9}-4i$

2. Jika ada, tentukanlah bilangan kompleks *z* yang memenuhi sifat berikut :

   (a) $z^{-1}=z$

   (b) $\bar{z}=-z$

   (c) $\bar{z}=z^{-1}$

3. Buktikan bahwa ∀z ∈ C berlaku:

$$Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \text{dan} \qquad Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2}$$

4. Buktikan: $z=\bar{z}$ jika dan hanya jika z adalah bilangan real

5. Buktikan: $z^2=(\bar{z})^2$ jika dan hanya jika z adalah bilangan real atau z adalah bilangan kompleks imajiner murni.

6. Nyatakan bilangan-bilangan $3+4i$, $1-i$, $-1+i$, 2, $-3i$, $e+\pi i$, dan $-2+\sqrt{3}$ sebagai titik-titik di bidang kompleks

1.3 Geometri Bilangan Kompleks

Secara aljabar bilangan kompleks *z* = *x*+*yi* dapat dibayangkan sebagai pasangan terurut dua bilangan real (*x*,*y*) yang terletak di bidang Euclides atau bidang Argan R^2, sehingga secara geometri himpunan bilangan kompleks C dapat pula dinyatakan sebagai suatu bidang, yang disebut bidang kompleks atau bidang-*z*. Pada bidang kompleks, sumbu *x* disebut sumbu real sedangkan sumbu *y* disebut sumbu imajiner. Dengan demikian, suatu bilangan kompleks $z = x+yi$ dapat dinyatakan sebagai titik di bidang kompleks dengan koordinat (ax,y) dan C ~= R^2. Selain itu, suatu bilangan kompleks $z = x+yi$ dapat dinyatakan pula sebagai vektor di bidang kompleks dengan titik pangkal (0,0) dan titik ujung (a,b).

Jika pada R^2 kita dapat menyatakan suatu titik dalam koordinat kutub (polar) maka demikian pula pada C, dengan mendefinisikan **modulus** dan **argumen** dari *z*. Pada R^2, modulus kita kenal sebagai panjang atau norm vektor (x,y), sedangkan argumen kita kenal sebagai arah vektor (x,y). Modulus dari $z = x+yi$, dinotasikan sebagai $|z|$ didefinisikan sebagai

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

sedangkan argumen dari *z*, dinotasikan sebagai $arg(z)$, didefinisikan sebagai suatu sudut θ yang memenuhi

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \text{ dan } \sin\theta = \frac{y}{|z|}$$

Karena sifat fungsi sinus dan cosinus yang periodik, maka nilai $arg(z)$ tidak tunggal. Oleh karena itu $\forall z \in$ C perlu dipilih suatu $arg(z)$ yang disebut sebagai **argumen utama** dari *z*, dinotasikan sebagai $Arg(z)$, adalah $arg(z)$ yang berada pada selang $(-\pi,\pi]$.

Sekarang kita siap mendefinisikan bentuk kutub (polar form) bilangan kompleks secara umum. Misalkan $z = x + iy, r = |z|$, dan $\theta = Arg(z)$ maka jelas bahwa

$$x = r\cos\theta \text{ dan } y = r\sin\theta$$

sehingga

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ atau sering ditulis } z = r\,cis\,\theta.$$

Teorema de Moivre: Jika $z = r\ cis\ t$ maka $z^n = r^n\ cis\ nt, \forall n$ bilangan bulat tak negatif

Perhatikan bahwa pada kedua teorema tersebut, penyajian bilangan kompleks dalam koordinat polar memiliki sifat yang sama dengan fungsi eksponen natural, yaitu

$$e^a e^b = e^{a+b} \text{dan } \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}.$$

Oleh karena itu bilangan kompleks dalam bentuk polar dapat pula dituliskan sebagai berikut.

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r\ cis\ \theta = re^{i\theta}.$$

Dengan demikian, kedua teorema tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk eksponen sebagai berikut.

Jika $z_1 = r_1\ e^{i\ t_1}$ dan $z_2 = r_2\ e^{i\ t_2}$ maka

1. $z_1 z_2 = r_1\ e^{i\ t_1} r_2\ e^{i\ t_2} = r_1 r_2\ e^{i\ (t_1+t_2)}$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\ e^{i\ t_1}}{r_2\ e^{i\ t_2}} = \frac{r_1}{r_2}\ e^{i\ (t_1-t_2)}$
3. $z^n = r^n\ e^{i\ nt}, \forall n$ bilangan bulat tak negatif.

Kesamaan dua bilangan kompleks dalam bentuk kutub dinyatakan dalam definisi berikut, yang dapat dimanfaatkan untuk menentukan akar bilangan kompleks.

Definisi: $r\ cis\ t = \rho\ cis\ \theta$ jika dan hanya jika $r = \rho$ dan $t = \theta + 2k\pi$

1.4 Akar Bilangan Kompleks

Jika c adalah bilangan kompleks, akan ditentukan $\sqrt[n]{c} = c^{\frac{1}{n}}$.

Misalkan $z = \sqrt[n]{c}$ dan $c = \rho\ cis\ \theta$ maka akan ditentukan z yang memenuhi $z^n = c$.

Misalkan $z = r\ cis\ t$ maka $z^n = r^n\ cis\ nt = c = \rho\ cis\ \theta$. Berdasarkan definisi kesamaan dua bilangan kompleks dalam bentuk kutub maka diperoleh

$$r^n = \rho \text{ dan } nt = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Dengan demikian

$$r = \rho^{\frac{1}{n}} \text{ dan } t_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \ k = 0, 1, \ldots n - 1.$$

Jadi diperoleh sebanyak n akar dari c, yaitu

$$z_k = \rho^{\frac{1}{n}} \ cis \ \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \ k = 0, 1, \ldots n - 1.$$

Contoh: Tentukan $\sqrt[3]{i}$.

Di sini akan kita tentukan z yang memenuhi $z^3 = i$. Kita nyatakan z dan i dalam bentuk kutub. Bentuk kutub untuk i adalah $1 \ cis \ \frac{\pi}{2}$. Misalkan $z = r \ cis \ t$. Dari persamaan $z^3 = i$ diperoleh $z^3 = r^3 \ cis \ 3t = 1 \ cis \ \frac{\pi}{2}$, sehingga

$$r^3 = 1 \text{ dan } 3t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k = 0, 1, 2.$$

Akibatnya,

$$r = 1 \text{ dan } t = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \ k = 0, 1, 2.$$

Untuk $k = 0 \Rightarrow z = r \ cis \ t_0 = 1 \ cis \ \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$,
untuk $k = 1 \Rightarrow z = r \ cis \ t_1 = 1 \ cis \ \frac{5v\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6} i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$,
dan untuk $k = 2 \Rightarrow z = r \ cis \ t_2 = 1 \ cis \ \frac{3\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} i \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - i = -i$.
Jadi, telah diperoleh tiga akar dari i, yaitu $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, dan $z_2 = -i$.

LATIHAN

1. Tentukan semua z yang memenuhi persamaan $z^3 + 8 = 0$
2. Selesaikan persamaan $z^2 + i = 0$ kemudian gunakan hasil yang diperoleh untuk menyelesaikan persamaan $z^4 + 2iz^2 - 1 = 0$
3. Jika $|z| < 1$ buktikan bahwa *Re (z+1) > 0*
4. Tentukan enam bilangan kompleks yang memenuhi persamaan $z^6 - \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} = 0$
5. Jika $z + \frac{1}{z}$ adalah bilangan real, buktikan bahwa *Im (z) = 0* atau $|z| = 1$

2.1 FUNGSI KOMPLEKS

Pada bagian ini dibahas fungsi bernilai kompleks dengan variabel kompleks (selanjutnya cukup disebut fungsi kompleks). Simbol untuk variabel kompleks adalah z, untuk membedakan dengan fungsi bernilai real dengan simbol variabel x. Sebuah fungsi kompleks f adalah aturan yang mengaitkan setiap anggota himpunan A dengan anggota himpunan B (notasi : $f : A \longrightarrow B$). Himpunan A disebut domain fungsi (ingat domain adalah himpunan buka dan terhubung), himpunan B disebut kodomain dan $f(A)$ disebut range. Peta dari z oleh f adalah $f(z)$ (disebut juga nilai fungsi). Dalam hal ini, fungsi yang akan dibahas adalah fungsi dengan domain $A \subset \mathbb{C}$ dan kodomain $\mathbb{C}$. Fungsi kompleks

$$\begin{aligned} f &: A \to \mathbb{C} \\ &: z \longmapsto z^2 \end{aligned}$$

biasanya hanya ditulis $f(z) = z^2$.

Misalkan diketahui fungsi $f : A \to \mathbb{C}$ dan $g : B \to \mathbb{C}$ dan $c \in \mathbb{C}$, maka

$$\begin{aligned} (cf)(z) &= cf(z) \\ (f \pm g)(z) &= f(z) \pm g(z) \\ (f.g)(z) &= f(z).g(z) \end{aligned}$$

dan jika $g(z) \neq 0$, maka

$$\frac{f}{g}(z) = \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Domain untuk fungsi-fungsi tersebut adalah $A \cap B$. Selain itu, fungsi kompleks dapat dikomposisikan, yaitu

$$(f \circ g)(z) = f(g(z))$$

asalkan $g(B) \subseteq A$.

Selain dalam variabel bebas z, fungsi kompleks dapat ditulis dalam bentuk

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y)\, i$$

dengan $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Berdasarkan hal tersebut, fungsi kompleks dapat dipandang sebagai pemetaan dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}^2$, yaitu

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

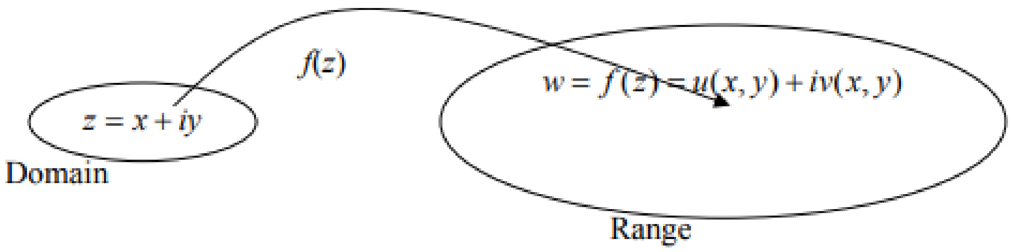
Sebagai contoh, fungsi $f(z) = z^2$ dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} f(z) &= (x+yi)^2 \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi \end{aligned}$$

atau sebagai pemetaan dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}^2$, yaitu

$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right).$$

Pada rumus di atas, z adalah bilangan kompleks, jadi S merupakan domain definisi fungsi f dan himpunan yang merupakan seluruh nilai fungsi f disebut sebagai range (jangkauan) dari f. Sedangakn w adalah juga bilangan kompleks, sehingga dapat ditulis sebagai $w = u + iv$, yang bergantung pada bilangan kompleks $z = x + iy$. Jadi w dapat ditulis sebagai $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.



Dengan demikian fungsi kompleks $f(z)$ ekuivalen dengan pasangan fungsi $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ yang keduanya bergantung pada dua peubah x dan y.

Himpunan S disebut daerah asal (domain) dari f, ditulis D_f dan $f(z)$ disebut nilai dari f atau peta dari z oleh f. Range atau daerah hasil (jelajah) dari f ditulis R_f , yaitu himpunan $f(z)$ untuk setiap z anggota S.

Contoh 1 :

a) $w = z + 1 - i$

b) $w = 4 + 2i$

c) $w = z^2 - 5z$

d) $f(z) = \dfrac{3-z}{2z+1}$

Contoh $1(a), 1(b), 1(c)$ adalah fungsi kompleks dengan domain semua titik pada bidang Z. Sedangkan contoh $1(d)$ adalah fungsi kompleks dengan domain semua titik pada bidang Z , kecuali $z = -\dfrac{1}{2}$.

Jika $z = x + iy$, maka fungsi $w = f(z)$ dapat diuraikan menjadi $w = u(x,y) + iv(x,y)$ yang berarti Re(w) dan Im(w) masing-masing merupakan fungsi dengan dua variabel real x dan y.

Apabila $z = r(\cos\theta + \text{i}\sin\theta)$, maka $w = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$.

Contoh 2: Tuliskan $f(z) = 2z^2 - i$ dalam bentuk u dan v !

Penyelesaian.

Misal $z = x + iy$, maka fungsi $w = f(z) = 2z^2 - i$

$$\begin{aligned} &= 2(x + iy)^2 - i \\ &= 2(x^2+2xyi-y^2) - i \\ &= 2(x^2-y^2) + i(2xy-1). \end{aligned}$$

Jadi $u = 2(x^2-y^2)$ dan $v = 2xy-1$.

2.1.1. Komposisi Fungsi Kompleks

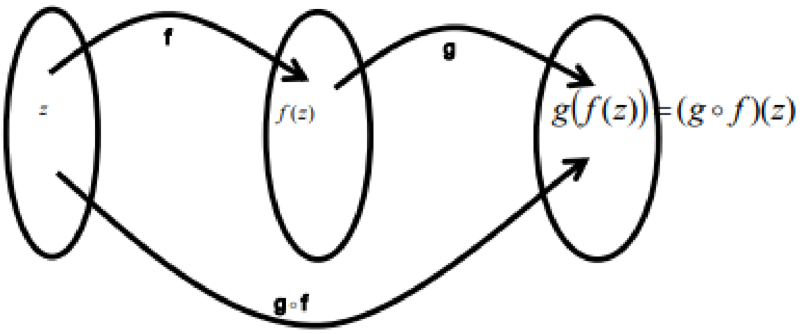
Contoh 3. Jika $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, tentukan u dan v jika $f(z) = z^2 + i$

Penyelesaian.

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 + i \\ &= [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^2 + i \\ &= r^2[\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta] + i \\ &= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + r^2 i\sin 2\theta + i \\ &= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (1 + r^2\sin 2\theta)i \end{aligned}$$

berarti $u = r^2(\cos 2\theta - \sin^2\theta)$ dan $v = 1 + r^2\sin 2\theta$.

Diberikan fungsi $f(z)$ dengan domain D_f dan fungsi $g(z)$ dengan domain D_g. Jika $R_f \cap D_g \neq \phi$, maka ada fungsi komposisi $(g \circ f)(z) = g(f(z))$, dengan domain D_f.



Tidak berlaku hukum komutatif pada $(g \circ f)(z)$ dan $(f \circ g)(z)$.

Contoh 4. Misal $f(z) = 3z - i$ dan $g(z) = z^2 + z - 1 + i$, maka

- Jika $R_f \cap D_g \neq \phi$,

  maka $(g \circ f)(z) = g(f(z))$

$$\begin{aligned} &= g(3z - i) \\ &= (3z - i)^2 + (3z - i) - 1 + i \\ &= 9z^2 - 6iz - 1 + 3z - i - 1 + i \\ &= 9z^2 - 3z - 2 - 6iz \end{aligned}$$

- Jika $R_g \cap D_f \neq \phi$,

  maka $(f \circ g)(z) = f(g(z))$

$$\begin{aligned} &= f(z^2 + z - 1 + i) \\ &= 3z^2 + 3z - 3 + 3i - i \end{aligned}$$

Karena $9z^2 - 3z - 2 - 6iz \neq 3z^2 + 3z - 3 + 3i - i$.

Jadi $(g \circ f)(z) \neq (f \circ g)(z)$ atau $(g \circ f) \neq (f \circ g)$ (tidak komutatif).

2.2 FUNGSI ELEMENTER

Fungsi kompleks biasa dinotasikan sebagai $w = f(z)$ atau $w = u(x,y) + iv(x,y) = f(x,y)$. Secara geometris, fungsi f merupakan transformasi yang memetakan titik di bidang-z ke bidang-w. Dengan demikian, fungsi kompleks dapat dipandang sebagai fungsi dari R^2 ke R^2 yang memetakan (x,y) menjadi (u,v). Fungsi yang dibahas di sini meliputi fungsi linear, fungsi balikan, fungsi bilinear, fungsi pangkat, fungsi eksponen, fungsi logaritma, fungsi trigonometri, dan fungsi hiperbolik.

2.2.1 Fungsi Linier

Fungsi linear memiliki bentuk umum

$$w = f(z) = az + b,$$

dengan $a, b \in \mathbb{C}$. Jika $a = 0$ maka fungsi linear berubah menjadi fungsi konstan. Jika $a = 1$ dan $b = 0$ maka fungsi linear merupakan fungsi identitas.

Untuk mempelajari bagaimana fungsi linear mentransformasikan suatu titik z di bidang-z menjadi w di bidang z, perhatikan bahwa fungsi linear dapat dipandang sebagai komposisi dua transformasi, yaitu

$$w_1 = az \quad \text{dan } w = w_1 + b = az + b.$$

Misalkan $z = rcist = |z|\, cis \arg z$ dan $a = \rho cis\theta = |a|\, cis \arg a$ maka

$$w_1 = az = r\rho\ cis\ (t+\theta) = |a|\,|z|\, cis(\arg a + \arg z).$$

Oleh karena itu, transformasi $w_1 = az$ menghasilkan

$$|w_1| = |a|\,|z| \quad \text{dan} \quad \arg w_1 = \arg a + \arg z.$$

Hal tersebut dapat diartikan bahwa transformasi w_1 mengakibatkan modulus z memanjang atau memendek dengan faktor $|a|$ dan z terotasi sejauh $\arg a$. Jika $|a| < 1$ maka modulus z memendek, jika $|a| > 1$ maka modulus z memanjang, dan modulus z tetap jika $|a| = 1$.

Selanjutnya, jika dimisalkan $b = b_1 + ib_2$ maka w_1 mengalami pergeseran horisontal sejauh b_1 dilanjutkan pergeseran vertikal sejauh b_2 untuk menghasilkan $w = w_1 + b$.

Jadi oleh **transformasi linear** $w = az + b$, titik z mengalami **penskalaan sebesar** $|a|$**, rotasi sejauh** $\arg a$ **dan pergeseran sejauh** b.

2.2.2 Fungsi Balikan

Fungsi Balikan adalah fungsi yang berbentuk

$$w = f(z) = \frac{1}{z},$$

dengan $z \neq 0$.

Misalkan $z = rcist, r \neq 0$ maka

$$w = f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} cis(-t).$$

Secara geometris, hal ini dapat diartikan bahwa transformasi resiprokal terhadap z menghasilkan bilangan kompleks yang panjangnya $|z|^{-1}$ dan sudutnya $-\arg z$.

2.2.3 Fungsi Bilinier

Fungsi berbentuk

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_n z^n,$$

dengan n bilangan bulat tak negatif dan $a_0, a_1, \ldots a_n$ konstanta kompleks, disebut **polinom**.

Misalkan $p(z)$ dan $q(z)$ adalah polinom. Fungsi berbentuk

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

yang terdefinisi untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ dengan $q(z) \neq 0$, disebut **fungsi rasional**.

2.2.4 Fungsi Pangkat

Fungsi pangkat yang didefinisikan untuk setiap bilangan kompleks z adalah fungsi berbentuk

$$f(z) = z^n,$$

dengan $n \in \mathbb{N}$.

Fungsi eksponen pada bilangan kompleks e^z memiliki sifat-sifat berikut, yang serupa dengan sifat fungsi eksponen pada bilangan real.

2.2.5 Fungsi Eksponen

Fungsi eksponen pada bilangan kompleks $z = x + iy$ didefinisikan sebagai

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y = i \sin y).$$

Fungsi eksponen pada bilangan kompleks e^z memiliki sifat-sifat berikut, yang serupa dengan sifat fungsi eksponen pada bilangan real.

1. $e^z \neq 0$
2. $e^0 = 1$
3. $e^{z+w} = e^z e^w$
4. $e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}$
5. $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$
6. $e^z = e^{z+2\pi i}$
7. $|e^z| = e^x$ dan $Arg(e^z) = y$.

2.2.6 Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma pada himpunan bilangan kompleks didefinisikan sebagai berikut. Misalkan $z = re^{it}$ maka

$$\log z = lnr + it = ln\,|z| + iarg(z).$$

Perlu diperhatikan bahwa fungsi $\log z$ hanya terdefinisi untuk $z \neq 0$.
Karena sifat periodik fungsi sinus dan cosinus maka $arg(z)$ memiliki tak berhingga banyaknya nilai, sehingga untuk suatu z diperoleh tak berhingga banyaknya nilai $\log z = ln\,|z| + i(Arg(z) = 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, dengan $-\pi < Arg(z) \leq \pi$ adalah argumen utama. Oleh karena itu fungsi logaritma kompleks merupakan suatu fungsi bernilai banyak atau *multivalued function*. Oleh karena itu perlu didefinisikan fungsi logaritma yang bernilai tunggal, yaitu

$$Logz = ln\,|z| + i\,Arg(z) = lnr + it,$$

dengan $-\pi < t \leq \pi$. Dengan pendefinisian tersebut jelas bahwa

$$\log z = Logz + 2k\pi i =, k \in \mathbb{Z}.$$

Dengan memanfaatkan sifat fungsi logaritma natural pada bilangan real, dapat dibuktikan bahwa fungsi logaritma pada bilangan kompleks memenuhi sifat-sifat berikut.

1. $\log(zw) = \log z + \log w$
2. $\log \frac{z}{w} = \log z - \log w$
3. $\log e^z = z$
4. $e^{\log z} = z$
5. $\log\left(z^p\right) = p \log z$

2.2.7 Fungsi Trigonometri dan Fungsi Hiperbolik

Perhatikan bahwa berdasarkan rumus Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ dan $e^{ix} = \cos x - i \sin x$, diperoleh

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ dan } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Oleh karena itu, fungsi sinus dan cosinus pada bilangan kompleks didefinisikan sebagai berikut.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ dan } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

sedangkan fungsi trigonometri yang lain didefinisikan sebagai

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},\ \sec z = \frac{1}{\cos z},\ \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

Sifat-sifat fungsi trigonometri:

1. $\sin z = 0$ jika dan hanya jika $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
2. $\cos z = 0$ jika dan hanya jika $z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
3. $\sin(-z) = -\sin z$
4. $\cos(-z) = \cos z$
5. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
6. $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$
7. $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin w \sin z$

Fungsi sinus dan cosinus hiperbolik pada himpunan bilangan kompleks didefinisikan sebagai berikut.

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \text{ dan } \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Fungsi trigonometri hiperbolik yang lain didefinisikan seperti fungsi trigonometri, yaitu

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z},\ \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},\ sechz = \frac{1}{\cosh z},\ cschz = \frac{1}{\sinh z}.$$

Analog dengan pendefinisian fungsi real, fungsi kompleks *f* adalah suatu aturan yang memetakan atau mentransformasikan suatu bilangan $z = x + iy \in$ C menjadi suatu bilangan kompleks $w = u + iy \in$ C. Sehingga fungsi kompleks disebut pula sebagai **transformasi**.

Definisi 3.1.1

Transformasi fungsi kompleks adalah korespondensi antara titik-titik di bidang-*z* dengan titik-titik di bidang-*w* disebut pemetaan atau transformasi dari titik-titik di bidang-*z* dengan titik-titik di bidang *w* oleh fungsi *f*

Pemetaan dapat berupa :

- Translasi / pergeseran
- Rotasi / perputaran
- Refleksi / pencerminan

3.1 Transformasi Linier

Transformasi linier adalah pencerminan dibawah fungsi linier $f(z) = az + b$, dimana a dan b adalah bilangan kompleks.

3.1.1 Regangan dan Putaran

Fungsi $g(z) = az$ merupakan suatu fungsi **regangan putaran (**rotation stretching**)** dengan hubungan

$|g(z)| = |az| = |a||z|$, (sifat-sifat $|z|$ halaman 12) dan

$arg\, g(z) = arg(az) = arg\, a + arg\, z$

Dalam hal :

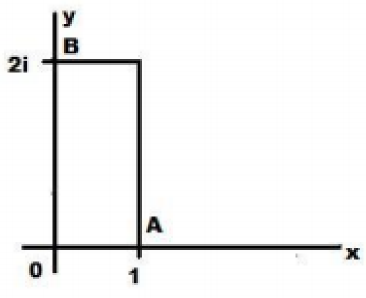
1. $|a| = 1$, yang berarti $a \neq 0$ maka g merupakan suatu rotasi murni.
2. $\arg a = 0$ maka titik-titik $z \ni D_g$ akan mengalami peregangan (bila $|a| > 1$) atau pengerutan (bila $|a| < 1$)
3. $|a| = 1$ dan $\arg a = 0$, yang berarti $a = 1$ maka g menjadi $g(z) = z$ yang merupakan fungsi identitas.

3.1.2 Pergeseran

Selanjutnya $f(z) = z + b$ merupakan fungsi yang menggeser tiap titik di D_f sejauh b. Dengan demikian, fungsi linier $w = (fog)(z) = az + b$ merupakan gabungan dari regangan putaran, dan translasi (geseran)

Contoh

Transformasi $w = (1 + i)z + 3 - 1$ mentransformasikan daerah persegi panjang pada bidang-*z* dalam gambar, ke daerah persegi panjang yang terletak di bidang-*w*.



Penyelesaian :

Transformasi ini dapat ditulis dalam dua transformasi, yaitu

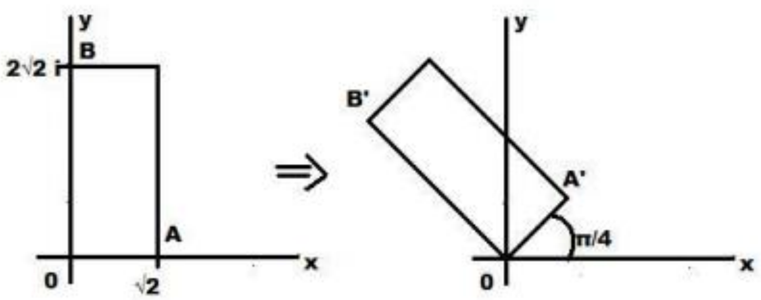
$f \circ g(z) = w$ dengan $f(z) = z + 3 - i$ dan $g(z) = (1 + i)z$

- Regangan putaran

  $g(z) = (1 + i)z$ maka $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

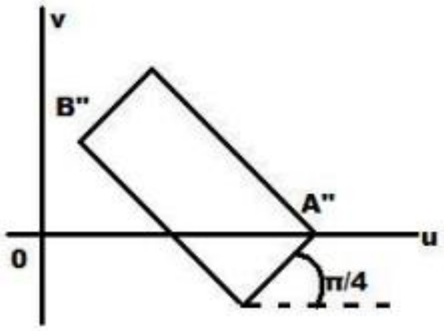
  dan $\arg(1 + i) = tag^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = tag^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

  transformasi pertama adalah regangan sebesar $\sqrt{2}$ kemudian dilanjutkan dengan perputaran sebesar $\frac{\pi}{4}$



- Pergeseran

  Transformasi kedua pergeseran sejauh $3-i$ yang dapat dilakukan dengan pergeseran ke kanan sejauh tiga satuan dan diikuti pergeseran ke bawah sejauh satu satuan



3.2 Transformasi Balikan (Resiprokal)

Suatu transformasi yang didasarkan pada fungsi f dengan $f(z)=\frac{1}{z}$ dinamakan transformasi kebalikan .

Secara geometric, transformasi $w=\frac{1}{z}$ akan memetakan titik-titik yang mendekati $z=0$ ke titik-titik di daerah yang jauh dari peta titik-titik sebelumnya.

Dengan menuliskan z dan w dalam bentuk kutub, kita lihat bahwa jika $z=r\ cis\ t$ maka diperoleh

$$w=\frac{1}{r}cis(-t)$$

Bukti:

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{r\ cis\ t}=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{cis\ t}=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\cos t-i\sin t}=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\cos t-i\sin t}\cdot\frac{(\cos t+i\sin t)}{(\cos t+i\sin t)}$$

$$=\frac{1}{r}\cdot\frac{(\cos t+i\sin t)}{\cos^2 t+\sin^2 t}=\frac{1}{r}.(\cos t+i\sin t)=\frac{1}{r}.(\cos(-t)-\sin(-t))$$

$$=\frac{1}{r}.cis\ (-t)$$

Transformasi balikan secara geometri dapat di tinjau dari dua kasus, yaitu garis dan lingkaran. Peta garis dan lingkaran di R^2 oleh transformasi balikan w = 1/z memiliki Langkah-langkah sebagai berikut :

1. Misalkan persamaan garis lurus di R^2 adalah $ax+by+c=0$; $a,b\neq 0$ di transformasi oleh $w=\frac{1}{z}$. Namakan $z=x+iy$ dan $w=u+iv$, maka :

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{iy}{x^2+y^2}$$

   Sehingga diperoleh

$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ dan $v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

Jika x dan y dinyatakan dalam u dan v maka

$$u^2 + v^2 = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

Sehingga diperoleh

$x = u(x^2+y^2) = \frac{u}{u^2+v^2}$ dan $y = -v(x^2+y^2) = \frac{-v}{u^2+v^2}$

Jadi peta garis lurus di R^2 oleh transformasi $w = \frac{1}{z}$ adalah

$$ax + by + c = 0 \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} a\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) + b\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right) + c = 0$$

$$c(u^2+v^2) + au - bv = 0$$

Jika c = 0, maka peta nya berupa suatu garis lurus. Tetapi jika c ≠ 0 petanya berupa lingkaran.

2. Misalkan persamaan lingkaran di R^2 adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ di transformasi oleh w = 1/z maka

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \xrightarrow{\text{w = 1/z}} \frac{1}{u^2+v^2} + \frac{Au}{u^2+v^2} - \frac{Bv}{u^2+v^2} + C = 0$$

$$c(u^2+v^2) + Au - Bv + 1 = 0$$

Jika c = 0, maka peta nya berupa suatu garis lurus. Tetapi jika c ≠ 0 petanya berupa lingkaran.

Contoh

1. Kita akan melihat bayangan kurva dibawah pemetaan $w = \frac{1}{z}$, perhatikan garis tegak $x = 1$. Dari penguraian

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

Kita mempunyai

$u = \frac{x}{x^2+y^2}$ dan $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$

Kemudian karena setiap titik pada garis yang diberikan berbentuk $z = 1 + yi$

Kita mendapatkan bahwa

$u = \frac{x}{1^2+y^2}$ dan $v = -\frac{y}{1^2+y^2}$

Dengan menguadratkan dan menjumlahkan dua persamaan terakhir itu, kita memperoleh

$$u^2 + v^2 = u$$

$$u^2 + v^2 - u = 0$$

$$u^2 - u + \frac{1}{4} + v^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2} = \frac{1}{2}$$

Sehingga, diperoleh sebuah lingkaran $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

Setelah ditemukan gambar transformasi dari garis tersebut, kita akan menentukan daerah dari

$R(z) > 1$, $R(z) < 1$, *dan* $R(z) = 1$ pada bidang w

Misalkan daerah di dalam lingkaran,

$$\left|w - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

$$\left|u + iv - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v} < \frac{1}{2}$$

$$u^2 - u + \frac{1}{4} + v^2 < \frac{1}{4}$$

$$u^2 - u + v^2 < 0$$

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 - \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)^2 < 0$$

$$\frac{x^2 - x(x^2 + y^2) + y^2}{(x^2 + y^2)^2} < 0$$

$$x^2 - x(x^2 + y^2) + y^2 < 0$$

$$(x^2 + y^2)(1 - x) < 0$$

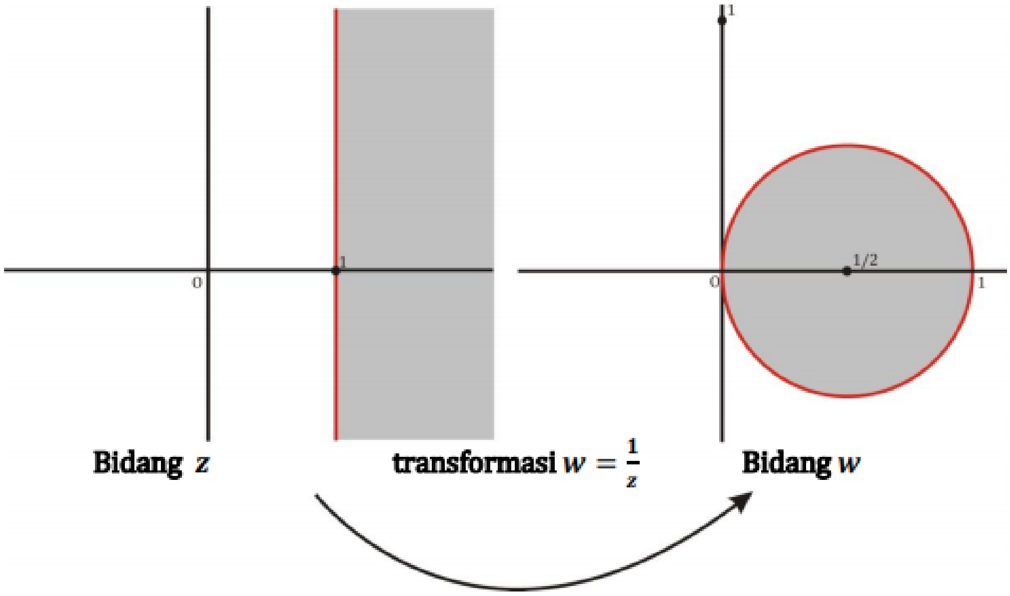
$$(1 - x) < 0$$

$$1 < x$$

jadi, daerah di dalam lingkaran tersebut adalah pemetaan dari daerah $x > 1$

Dengan cara yang hampir sama dapat ditunjukkan daerah di luar lingkaran adalah pemetaan dari daerah $x < 1$ dan garis pada lingkaran merupakan pemetaan dari garis $x = 1$

Seperti pada gambar di bawah ini:



Contoh 2

Carilah bayangan lingkaran $|z+1| = 1$ dibawah $w = \frac{1}{z}$

$$|z+1| = 1$$

$$|(x+1)+iy| = 1$$

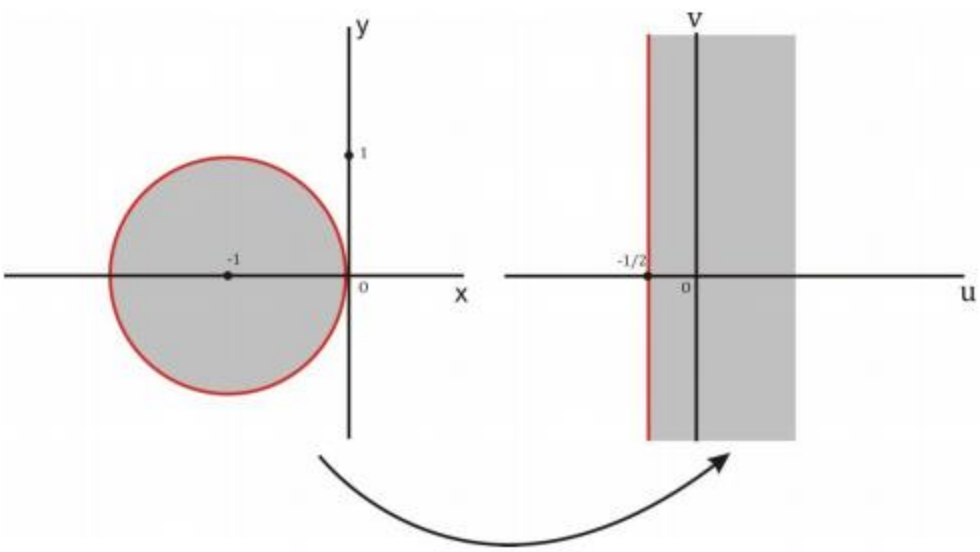
$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 1$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 + 2x = 0$$

$$a = 1, b = 2, c = 0, d = 0$$

$$2u + 1 = 0$$



Transformasi $w = \frac{1}{z}$

3.3 Transformasi Bilinier

Salah satu fungsi rasional yang menarik adalah fungsi bilinear, yang sering disebut pula sebagai **transformasi Moebius**, yaitu fungsi kompleks berbentuk

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

dengan $z \neq -\frac{d}{c}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ dan $ad - bc \neq 0$. Jelas bahwa jika $c = 0$ maka fungsi bilinear merupakan fungsi linear yang sudah dibahas pada sub bab sebelumnya. Oleh karena itu, pembahasan fungsi bilinear dibatasi untuk $c \neq 0$.

Perhatikan bahwa fungsi bilinear dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} w = f(z) &= \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} - \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{ad-bc}{c}\frac{1}{cz+d} \\ &= A + B\frac{1}{cz+d} \end{aligned}$$

dengan $A = \frac{a}{c}$ dan $B = \frac{ad-bc}{c} \neq 0$.

Oleh karena itu, fungsi bilinear akan mentransformasikan suatu bilangan kompleks z di bidang kompleks z menjadi w melalui beberapa proses berikut.

Transformasi linear Mula-mula z dikenai transformasi linear menjadi $w_1 = cz + d$

Transformasi resiprokal Selanjutnya w_1 dikenai transformasi resiprokal yang menghasilkan

$$w_2 = \frac{1}{w_1} = \frac{1}{cz + d}$$

Transformasi linear Akhirnya, w diperoleh dari w_2 melalui transformasi linear

$$w = A + Bw_2 = A + B\frac{1}{cz + d}.$$

Dengan demikian, fungsi bilinear dapat dipandang sebagai komposisi fungsi linear dan resiprokal.

LATIHAN

1. Carilah masing-masing bayangan dari garis atau lingkaran dari persamaan dibawah ini :

   a) $y = 1$
   b) $y = x - 1$
   c) $x = -1$
   d) $x + y = 1$
   e) $x^2 + (y-1)^2 = 4$
   f) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$
   g) Sumbu nyata
   h) Sumbu khayal

BAB IV

FUNGSI ANALITIK

Pada bab ini dibahas suatu sifat fungsi kompleks yang terkait dengan eksistensi turunan dan kekontinuan fungsi kompleks yaitu fungsi analitik.

4.1 Konsep Dasar Topologi di bidang Kompleks

Definisi 2.1

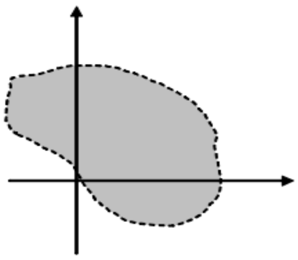
Misalkan $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{C}$.

1. *Titik* $z_0 \in A$ *disebut titik interior* A *jika terdapat* $r > 0$ *sehingga* $\triangle(z_0, r) \subset A$. *Himpunan semua titik interior* A *ditulis* $int(A)$.

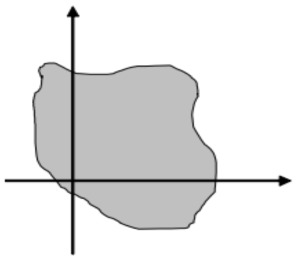
2. *Titik* $z_0 \in \mathbb{C}$ *disebut titik eksterior* A *jika terdapat* $r > 0$ *sehingga* $\triangle(z_0, r) \cap A = \emptyset$. *Himpunan semua titik interior* A *ditulis* $ext(A)$.

3. *Titik* $z_0 \in \mathbb{C}$ *disebut titik batas* A *jika setiap* $r > 0$, $\triangle(z_0, r) \cap A \neq \emptyset$ *dan* $\triangle(z_0, r) \cap A^c \neq \emptyset$. *Himpunan semua titik batas* A *ditulis* $\delta(A)$.

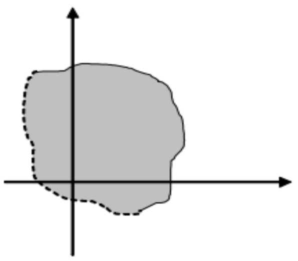
Suatu himpunan $A \subseteq \mathbb{C}$ disebut himpunan buka jika setiap titiknya adalah titik interior A. Berikut ini adalah contoh beberapa himpunan buka: $\triangle(z_0, r)$, $\triangle^*(z_0, r)$, $\{z : |z - z_0| > r\}$, $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, $\{z : |z - 2| + |z + 2| < 6\}$, dan lain-lain. Selanjutnya $A \subseteq \mathbb{C}$ disebut himpunan tutup jika $\mathbb{C} \backslash A$ adalah himpunan buka. Beberapa contoh himpunan tutup adalah $\overline{\triangle}(z_0, r)$, $\{z : \operatorname{Im} z \geq 3\}$, dan lain-lain. Perhatikan contoh-contoh himpunan buka dan himpunan tutup tersebut, batas-batas masing-masing himpunan adalah sebagai berikut: $\delta(\{z : \operatorname{Re} z > 0\}) = \mathbb{R}^c$, $\delta(\{z : |z - z_0| > r\}) = \delta(\{z : |z - z_0| \leq r\}) = K(z_0, r)$, dan lain-lain. Closure suatu himpunan A adalah $\overline{A} = A \cup \delta(A)$. Perhatikan gambar di bawah



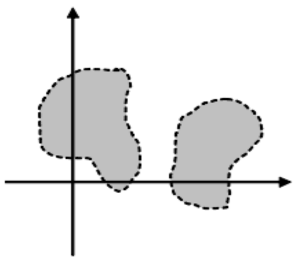
Himpunan Buka Terhubung



Himpunan Tutup



Himpunan Tidak Buka dan Tidak Tutup



Himpunan Buka Tidak Terhubung

4.2 Limit Fungsi Kompleks

Definisi Limit: *Misalkan $f(z)$ adalah fungsi kompleks dengan daerah asal (domain) $D_f \subseteq \mathbb{C}$, dan $z_0 \in \mathbb{C}$, dengan z_0 adalah titik limit dari D_f. Limit $f(z)$ mendekati L jika z mendekati z_0 didefinisikan dan dinotasikan sebagai berikut.*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \iff \forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \ni \ |f(z) - L| < \epsilon \ bila \ 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Definisi tersebut dapat pula dinyatakan dalam 'bahasa' persekitaran sebagai berikut.

Misalkan $f(z)$ adalah fungsi kompleks dengan daerah asal (domain) $D_f \subseteq \mathbb{C}$, dan $z_0 \in \mathbb{C}$, dengan z_0 adalah titik limit dari D_f.

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \iff \forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \ni \ f(z) \in N_\epsilon(L) \ bila \ z \in N_\delta^*(z_0).$$

Sifat-sifat limit:

1. Jika $\lim_{z\to z_0} f(z)$ ada maka nilainya tunggal
2. Jika $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, dan $L = L_1 + iL_2$ maka $\lim_{z\to z_0} f(z) = L = L_1 + iL_2 \iff \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = L_1$ dan $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = L_2$.
3. Jika $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ dan $\lim_{z\to z_0} g(z) = M$ maka
   a. $\lim_{z\to z_0} (f(z) + g(z)) = L + M$
   b. $\lim_{z\to z_0} (kf(z)) = kL, \forall k \in \mathbb{C}$
   c. $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = LM$
   d. $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M}$ asalkan $M \neq 0$
4. Jika $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = 0$ maka $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$.

Contoh:

1. Bila ada, tentukan $\lim_{z\to 3-4i} \frac{iRe(z^2)}{|z|}$

   Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 3-4i} \frac{iRe(z^2)}{|z|} &= \lim_{(x,y)\to(3,-4)} \frac{iRe(x^2 + y^2 + 2xyi)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(3,-4)} \frac{i(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{i(9 + 16)}{\sqrt{9 + 16}} = 5i\end{aligned}$$

2. Bila ada, tentukan $\lim_{z\to 0} \frac{iRe(z^2)}{|z|}$

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} \frac{iRe(z^2)}{|z|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{iRe(x^2+y^2+2xyi)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{i(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} i\sqrt{x^2+y^2} = 0.\end{aligned}$$

3. Bila ada, tentukan $\lim_{z\to 3i} \frac{z^2+9}{z-3i}$

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 3i} \frac{z^2+9}{z-3i} &= \lim_{z\to 3i} \frac{(z+3i)(z-3i)}{z-3i} \\ &= \lim_{z\to 3i} z+3i = 6i.\end{aligned}$$

4. Bila ada, tentukan $\lim_{z\to -i} \frac{z+i}{z^2+1}$

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -i} \frac{z+i}{z^2+1} &= \lim_{z\to -i} \frac{z+i}{(z+i)(z-i)} \\ &= \lim_{z\to -i} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{-2i} = \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

5. Bila ada, tentukan $\lim_{z\to 0} \frac{x^2}{z}$.

Jawab:

Karena $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$ maka

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \left|\frac{x^2}{z}\right| = \frac{|x^2|}{|z|} \\ &= \frac{|x|^2}{|z|} \leq \frac{|x|^2}{|x|} = |x| \leq |z|.\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil tersebut maka $\lim_{z\to 0} |f(z)| \leq \lim_{z\to 0} |z| = 0$. Akibatnya $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$.

6. Jika $f(z) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + i\frac{x^2}{y+1}$, tentukan $\lim_{z\to 0} f(z)$ bila ada.

Jawab:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} + i\frac{x^2}{y+1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) + iv(x,y).$$

4.3 Kekontinuan Fungsi Kompleks

Definisi Kekontinuan: *Misalkan $f(z)$ adalah fungsi kompleks dengan daerah asal (domain) $D_f \subseteq \mathbb{C}$, dan $z_0 \in \mathbb{C}$, dengan $z_0 \in D_f$. Fungsi $f(z)$ dikatakan* ***kontinu di*** *z_0 jika*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0),$$

dan fungsi $f(z)$ dikatakan **kontinu di suatu himpunan** $A \subseteq \mathbb{C}$ jika $f(z)$ kontinu di setiap $z \in A$.

Dalam definisi tersebut tersirat adanya tiga syarat yang harus dipenuhi agar suatu fungsi $f(z)$ kontinu di z_0, yaitu:

1. $f(z_0)$ harus terdefinisi
2. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ harus ada
3. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Sifat-sifat fungsi kontinu:

1. Misalkan $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ dan $z_0 = x_0+iy_0 \in D_f$. $f(z)$ kontinu di z_0 jika dan hanya jika $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0)$ dan $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0)$.
2. Jika $f(z)$ dan $g(z)$ kontinu di z_0 maka demikian pula halnya yang berikut ini.
   a. $f(z) + g(z)$
   b. $kf(z), \forall k \in \mathbb{C}$
   c. $f(z)g(z)$
   d. $\frac{f(z)}{g(z)}$ asalkan $g(z_0) \neq 0$
   e. $(f \circ g)(z)$, asalkan $f(z)$ kontinu di $g(z_0)$.

Contoh:

1. Bila $f(z)$ didefinisikan sebagai

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+9}{z-3i}, & \text{jika} z \neq 3i, \\ 2i, & \text{jika} z = 3i, \end{cases}$$

periksalah apakah $f(z)$ kontinu di $z = 3i$.

Jawab:

Telah diketahui pada contoh sebelumnya bahwa $\lim_{z\to 3i} \frac{z^2+9}{z-3i} = 6i$, sedangkan $f(-3i) = 2i$, sehingga $f(z)$ tidak kontinu di $z = 3i$.

2. Bila $f(z)$ didefinisikan sebagai

$$f(z) = \begin{cases} \frac{iRe(z)}{|z|}, & \text{jika} z \neq 0, \\ 0, & \text{jika} z = 0, \end{cases}$$

periksalah apakah $f(z)$ kontinu di $z = 3 - 4i$ dan di $z = 0$.

Jawab:

$$\begin{aligned} \lim_{z \to 3-4i} \frac{iRe(z)}{|z|} &= \lim_{(x,y)\to(3,-4)} \frac{iRe(x+yi)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(3,-4)} \frac{ix}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3i}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

Jelas bahwa $f(3-4i) = \frac{3}{5}i$ sehingga $f(z)$ kontinu di $z = 3 - 4i$. Sekarang akan diselidiki apakah $f(z)$ kontinu di $z = 0$ dengan memeriksa eksistensi nilai limitnya terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} \lim_{z \to 0} \frac{iRe(z)}{|z|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{iRe(x+yi)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ix}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Jika (x, y) mendekati $(0, 0)$ melalui sumbu x, atau garis $y = 0$, maka diperoleh

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ix}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{ix}{\sqrt{x^2}} = i.$$

Jika (x, y) mendekati $(0, 0)$ melalui sumbu y, atau garis $x = 0$, maka diperoleh

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ix}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{0i}{\sqrt{y^2}} = 0.$$

Karena kedua pendekatan tersebut menghasilkan nilai limit yang berbeda maka dapat disimpulkan bahwa $\lim_{z\to 0} \frac{iRe(z)}{|z|}$ tidak ada. Akibatnya, $f(z)$ tidak kontinu di $z = 0$.

3. Bila $f(z)$ didefinisikan sebagai

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z+i}{z^2+1}, & \text{jika} z \neq -i, \\ a, & \text{jika} z = -i, \end{cases}$$

tentukanlah nilai a agar $f(z)$ kontinu di $z = -i$.

Jawab: Telah diketahui bahwa $\lim_{z\to -i} \frac{z+i}{z^2+1} = \frac{1}{2}i$, sehingga $f(z)$ akan kontinu di $z = -i$ jika $\lim_{z\to -i} \frac{z+i}{z^2+1} = \frac{1}{2}i = f(-i) = a$. Jadi $a = \frac{1}{2}i$.

4.4 Turunan Fungsi Kompleks

Suatu fungsi $f : A \to \mathbb{C}$ dikatakan mempunyai turunan (terdiferensialkan) di z_0 dengan z_0 adalah titik interior A jika

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ada. Notasi untuk turunan adalah f' dan ditulis

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

atau dapat ditulis

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Fungsi f dikatakan mempunyai turunan di domain A jika $f'(z)$ ada untuk setiap $z \in A$.

Keterdiferensialan fungsi f pada suatu titik mengakibatkan kekontinuan fungsi f pada titik tersebut. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1.1

Jika f mempunyai turunan di z_0, maka f kontinu di z_0.

Bukti.

$$\begin{aligned}
\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) &= \lim_{z \longrightarrow z_0} \left[f(z_0) + (z - z_0) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] \\
&= f(z_0) + 0.f'(z_0) \\
&= f(z_0)
\end{aligned}$$

■

Kebalikan teorema tersebut tidak berlaku. Contoh penyangkalnya adalah $f(z) = |z|$ kontinu di $z = 0$, tetapi $f'(0)$ tidak ada (Buktikan!).

Contoh. Hitung $f'(z)$ jika $f(z) = z^n$ untuk n bilangan bulat positif
Untuk sebarang bilangan $z_0 \in \mathbb{C}$, maka

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)\left(z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}\right)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \left(z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}\right) \\
&= n z_0^{n-1}.
\end{aligned}$$

Hal ini berarti hasil yang diperoleh dari kalkulus berlaku juga di bilangan kompleks, yaitu $f'(z) = n z^{n-1}$ untuk sebarang $z \in \mathbb{C}$.

Selanjutnya, jika f dan g dua buah fungsi yang terdiferensialkan di z_0, maka kita dapat mencari turunan $cf, f \pm g, fg$, dan f/g. Khusus bagian yang terakhir ditambahkan syarat $g(z_0) \neq 0$. Aturan turunannya adalah seperti yang ada di kalkulus, yaitu:

$$\begin{aligned} (cf)'(z_0) &= cf'(z_0) \\ (f \pm g)'(z_0) &= f'(z_0) \pm g'(z_0) \\ (fg)'(z_0) &= f'(z_0).g(z_0) + f(z_0).g'(z_0) \\ \frac{f}{g}(z_0) &= \frac{f'(z_0).g(z_0) - f(z_0).g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}. \end{aligned}$$

Contoh. Carilah $f'(z)$ jika

1. $f(z) = z^2 - (3+i)z + 4 - 2i$
2. $f(z) = 3z^4 + \pi z^2 + iz^{-1}$
3. $f(z) = \frac{z^2-3+2i}{z^2+iz}$

Jawab. Kita gunakan aturan turunan, maka didapat

1. $f'(z) = 2z - (3+i)$
2. $f'(z) = 12z^3 + 2\pi z - iz^{-2}$
3. $f'(z) = \frac{2z(z^2+iz)-(z^2-3+2i)(2z+i)}{(z^2+iz)^2} = \frac{iz^2+(6-4i)z+2+3i}{z^4+2iz^3-z^2}$

Teorema 4.1.2

Misalkan $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ dan $g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ adalah fungsi sehingga $f(A) \subseteq B$. Jika f terdiferensialkan di z_0 dan g terdiferensialkan di $f(z_0)$, maka $g \circ f$ terdiferensialkan di z_0 dan $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0)$.

Sebagai contoh tentukan $f'(z)$ jika $f(z) = \left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^{10}$! Maka

$$f'(z) = 10\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^9 \frac{4z}{(z^2+1)^2} = 40\frac{(z^2-1)^9}{(z^2+1)^{11}}.$$

Secara umum, menentukan turunan fungsi yang variabelnya masih dalam z tidaklah sukar karena cara-cara yang telah dipelajari di kalkulus dapat diterapkan. Tetapi jika fungsi tersebut tidak dalam z (misalnya $f(z) = \overline{z}$ atau $f(z) = 2xy + (x^2+y^2)i$), maka aturan di atas tidak sepenuhnya dapat diterapkan. Bahkan kita harus mencari di titik mana saja fungsi-fungsi tersebut mempunyai turunan. Hal ini membawa kita pada *Persamaan Caucy-Riemann*.

4.5 Persamaan Cauchy Riemann

Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fungsi yang terdiferensialkan di $z_0 = x_0 + y_0 i$. Berdasarkan definisi, z_0 mestilah titik interior domain f dan

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ada. Penting dicatat bahwa limit tersebut ada dalam setiap arah $z \to z_0$. Jadi, jika kita pilih $z = x + y_0 i$ dengan $x \to x_0$, maka nilai limitnya sama. Dalam hal ini, f dapat dipandang sebagai fungsi dua variabel x dan y, yaitu

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + y_0 i) - f(x_0 + y_0 i)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\
&= u_x(z_0) + i v_x(z_0).
\end{aligned}$$

Kita simpulkan turunan parsial $u_x(z_0)$ dan $v_x(z_0)$ —hal ini berarti turunan parsial $f_x(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$ —ada dan memenuhi

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = f_x(z_0).$$

Serupa dengan hal tersebut, jika kita pilih $z = x_0 + yi$ dengan $y \to y_0$, maka

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0 + yi) - f(x_0 + y_0 i)}{i(y - y_0)} \\
&= \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} \\
&= v_y(z_0) - iu_y(z_0).
\end{aligned}$$

Hal ini berarti $f_y(z_0) = u_y(z_0) + iv_y(z_0)$ juga ada dan memenuhi

$$f'(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0) = -if_y(z_0).$$

Jika kedua hasil itu dibandingkan, maka akan didapat

$$u_x(z_0) = v_y(z_0) \text{ dan } u_y(z_0) = -v_x(z_0).$$

Sistem persaman diferensial parsial tersebut dikenal sebagai persamaan Cauchy - Riemann sebagai penghargaan kepada Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) dan Georg Bernhard Riemann (1826 - 1866), dua orang arsitek Analisis Kompleks.

Dalam koordinat polar, jika $f(r,\theta) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$, maka persamaan Cauchy-Riemann fungsi tersebut adalah

$$u_r(r,\theta) = \frac{1}{r} v_\theta(r,\theta) \text{ dan } v_r(r,\theta) = -\frac{1}{r} u_\theta(r,\theta).$$

Pembaca dapat membuktikan bentuk persamaan tersebut sebagai latihan.

Persamaan Cauchy-Riemann merupakan syarat perlu keterdiferensialan sebuah fungsi. Uraian di atas dapat dirangkum dalam teorema berikut.

Teorema 4.1.3

Jika $f = u + iv$ mempunyai turunan di z_0, maka u dan v memenuhi Persamaan Cauchy-Riemann di z_0.

Kebalikan teorema tersebut, secara umum tidak berlaku. Sebagai contoh, fungsi yang didefinisikan dengan

$$f(z) = \begin{cases} \exp\left(-z^{-4}\right) & \text{jika } z \neq 0 \\ 0 & \text{jika } z = 0 \end{cases}$$

memenuhi persamaan Cauchy-Riemann di 0, tetapi tidak terdiferensialkan di 0 bahkan tidak kontinu di 0 (Silakan diperiksa!) . Teorema berikut menjamin kriteria keterdiferensialan fungsi $f = u + iv$ di suatu titik z_0.

Teorema 4.1.4

Misalkan $f = u+iv$ terdefinisi pada domain $A \subseteq \mathbb{C}$ dan turunan parsial u_x, u_y, v_x, dan v_y ada di setiap elemen A.Jika semua turunan parsial tersebut kontinu dan memenuhi persamaan Cauchy Riemann di $z_0 \in A$, maka f mempunyai turunan di z_0 dan $f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0)$.

Contoh. Di titik mana fungsi $f(z) = \overline{z}$ mempunyai turunan?
Fungsi $f(z) = \overline{z}$ dapat ditulis sebagai $f = x - yi$. Turunan parsial u dan v masing-masing $u_x(z) = 1$, $v_y(z) = -1$, dan $u_y(z) = v_x(z) = 0$ untuk setiap z. Perhatikan bahwa tidak ada z yang memenuhi persamaan Cauchy-Riemann. Jadi, $f(z) = \overline{z}$ tidak mempunyai turunan di mana-mana.
Contoh. Di titik mana fungsi $f(z) = 2xy + (x^2 + y^2)\, i$ mempunyai turunan dan hitung nilai turunannya?
Turunan parsial u dan v masing-masing $u_x(z) = 2y$, $u_y(z) = 2x$, $v_x(z) = 2x$, dan $v_y(z) = 2y$ untuk setiap z. Persamaan Cauchy-Riemann:

$$\begin{array}{ccc} u_x(z) = v_y(z) & \text{dan} & u_y(z) = -v_x(z) \\ 2y = 2y & & 2x = -2x \end{array}$$

hanya terpenuhi untuk setiap z dengan $x = 0$. Jadi, f mempunyai turunan di $z = yi$ dan $f'(iy) = u_x(iy) + v_x(iy) = 2y$.
Contoh. Tentukan di titik mana fungsi $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$ mempunyai turunan dan hitung turunannya dititik tersebut!
Perhatikan bahwa Persamaan Cauchy-Riemann:

$$\begin{array}{ccc} u_x(z) = v_y(z) & \text{dan} & u_y(z) = -v_x(z) \\ 2x = 2x & & -2y = -2y \end{array}$$

terpenuhi untuk setiap z. Jadi, f mempunyai turunan di setiap $z = x + yi$ dan $f'(z) = u_x(z) + v_x(z) = 2x + 2y = 2(x + y) = 2z$. Hasil tersebut sesuai karena fungsi di atas tak lain adalah $f(z) = z^2$ yang turunannya $f'(z) = 2z$ untuk setiap z.

4.6 Fungsi Analitik

Salah satu konsep yang penting dalam analisis kompleks adalah fungsi analitik. Istilah lain untuk fungsi analitik adalah holomorpik dan reguler. Misalkan $f : A \to \mathbb{C}$ suatu fungsi (ingat bahwa A adalah himpunan buka dan terhubung) dan $z_0 \in A$, fungsi f dikatakan analitik di z_0 jika terdapat $\triangle(z_0, r)$ sehingga f mempunyai turunan di seluruh $\triangle(z_0, r)$. Fungsi f dikatakan analitik pada A jika f analitik di setiap $z \in A$(secara sederhana, f analitik di A jika f mempunyai turunan di seluruh A).

Definisi fungsi analitik: *Misalkan $f(z)$ fungsi kompleks dengan daerah definisi D_f dan $z \in Int(D_f)$. Fungsi f dikatakan ANALITIK di z_0 jika $f'(z)$ ada di semua z yang terletak pada suatu persekitaran $N_\epsilon(z_0)$ dari z_0.*

Fungsi yang analitik di seluruh bidang kompleks disebut ***entire function*** atau ***holomorphic function***. Titik z_0 disebut **titik singular** jika $f(z)$ tidak analitik di z_0 namun setiap persekitaran dari z_0 memuat sedikitnya satu titik z di mana $f(z)$ analitik. Fungsi yang merupakan hasil bagi dua entire function disebut ***meromorphic function***.

Jelas bahwa **jika f analitik di z_0 maka f terdiferensialkan di z_0, namun sifat sebaliknya belum tentu benar**.

Contoh

1. Jika $f(z) = x^2 - iy^2$ maka $u(x, y) = x^2$ dan $v(x, y) = -y^2$ sehingga $u_x = 2x, u_y = 0, v_x = 0$, dan $v_y = -2y$. Agar $f'(z)$ ada haruslah $u_x = v_y$ yang mengakibatkan $y = -x$. Jadi $f'(z)$ hanya ada untuk setiap (x, y) yang terletak pada garis $y = -x$. Jika kita pandang sebarang titik (x_0, y_0) pada garis tersebut maka kita tidak mungkin memperoleh persekitaran dari (x_0, y_0) sedemikian sehingga $f'(z)$ ada untuk setiap z pada persekitaran tersebut. Dengan demikian $f(z)$ tidak analitik pada garis $y = -x$. Akibatnya $f(z)$ tidak analitik di seluruh bidang kompleks. Pada contoh ini terlihat bahwa meskipun $f(z)$ terdiferensialkan di setiap titik pada garis $y = -x$ namun $f(z)$ tidak analitik pada garis tersebut.

2. Fungsi polinom terdiferensialkan di setiap $z \in \mathbb{C}$ sehingga polinom merupakan *entire function.*

3. Fungsi rasional $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, dengan $p(z)$ dan $q(z)$ polinom, adalah fungsi yang analitik di seluruh bidang kompleks kecuali pada z yang membuat $q(z) = 0$. Fungsi rasional merupakan salah satu contoh meromorphic function.

4. Fungsi bilinear $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ tidak analitik di $z = -\frac{d}{c}$ karena $f(z)$ merupakan fungsi rasional dengan $q(z) = cz+d$. Titik $z = -\frac{d}{c}$ merupakan titik singular.

5. Berdasarkan contoh sebelumnya, maka fungsi $f(z) = |z|^2$ tidak analitik di seluruh bidang kompleks, sebab $f(z)$ hanya terdiferensialkan di $z = 0$ sehingga tidak analitik di $z = 0$.

6. Fungsi eksponen $f(z) = e^z$ merupakan *entire function.*

Berdasarkan persamaan Cauchy - Riemann, sifat keanalitikan fungsi dapat dikaitkan dengan suatu sifat fungsi, yaitu keharmonikan. Sebelum membahas kaitan di antara keduanya, perlu didefinisikan apa yang dimaksud dengan fungsi yang harmonik.

4.7 Fungsi Harmonik

Definisi: Fungsi harmonik *Suatu fungsi REAL dua variabel $f(x, y)$ disebut fungsi harmonik bila $f(x, y)$ memenuhi persamaan diferensial parsial*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Persamaan diferensial partial tersebut dikenal sebagai ***Persamaan Laplace.***

Teorema 4.1.5

Jika $f(z)$ analitik maka bagian real dan imajiner dari $f(z)$ adalah fungsi-fungsi harmonik.

Bukti: Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Akan dibuktikan bahwa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ dan } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Karena $f(z)$ analitik maka $f(z)$ terdiferensialkan di setiap $z \in \mathbb{C}$, sehingga berlaku persamaan Cauchy-Riemann, yaitu

$$u_x = v_y \text{ dan } u_y = -v_x.$$

Perhatikan bahwa $u_{xx} = v_{xy} = v_{yx} = -u_{yy}$, sehingga diperoleh $u_{xx} = -u_{yy}$ atau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Dengan cara yang sama diperoleh $v_{xx} = -u_{xy} = -u_{yx} = -v_{yy}$, sehingga diperoleh pula

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Jadi teorema telah terbukti. Dalam hal ini $v(x,y)$ disebut **harmonik sekawan** dari $u(x,y)$.

Perhatikan bahwa sifat sebaliknya belum tentu benar, yaitu jika $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ adalah fungsi-fungsi harmonik maka tidak dijamin bahwa $f(z)$ analitik.

Contoh

1. Jika $f(z) = \bar{z} = x - iy$ maka $u_x = 1, u_{xx} = 0, u_y = 0, u_{yy} = 0, v_x = 0, v_{xx} = 0, v_y = -1$, dan $v_{yy} = 0$. Perhatikan bahwa $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ memenuhi persamaan Laplace namun $f(z)$ tidak memenuhi persamaan Cauchy-Riemann. Dengan demikian $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ adalah fungsi-fungsi harmonik namun $f(z)$ tidak analitik.

2. Jika $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ maka $u_x = \cos x \cosh y, u_y = \sin x \sinh y, v_x = -\sin x \sinh y, v_y = \cos x \cosh y, u_{xx} = -\sin x \cosh y, u_{yy} = \sin x \cosh y, v_{xx} = -\cos x \sinh y, v_{yy} = \cos x \sinh y$ sehingga $u_{xx} + u_{yy} = 0$ dan $v_{xx} + v_{yy} = 0$. Jadi $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ adalah fungsi harmonik.

LATIHAN

1. Nyatakan hubungan/ implikasi antara fungsi seluruh (*entire*), fungsi analitik, fungsi diferensiabel, dan fungsi kontinu.
2. Diberikan $f(z) = xy - ixy$.
   a. Apakah *f* merupakan fungsi seluruh.
   b. Jika bukan fungsi seluruh, apakah *f* analitik di suatu titik.
   c. Jika tidak analitik di suatu titik, apakah ada titik yang menyebabkan fungsi *f* terdiferensial di titik tersebut.
3. Diberikan $u(x, y) = 2x - x^3 + kxy^2$
   a. Tentukan k agar $u(x, y)$ merupakan fungsi harmonik
   b. Tentukan fungsi analitik $f(x, y) = u(x, y) + i(x, y)$.
4. Tunjukkan bahwa $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ merupakan fungsi harmonik dan tentukan fungsi analitik $u + iv$ yang sesuai.

DAFTAR PUSTAKA

Choudhary, B.,1983. The Elements of Complex Analysis. New Delhi. Wiley Eastern Limited.

Churchil, R.V, 2009, Complex Variable & Application 8th edition, Mc Graw-Hill.

Larg, S.,1993. Graduate Texts in Mathematics, Complex Analysis. Third Edition. New York : Springer Verlag

Poliouras, J.D, 1990. Complex Variable for Scientists and Engineers, 2nd edition, Macmillan Coll Div.

Soemantri, R. 1994. Fungsi Variabel Kompleks. Depdikbud Dikjen Pendidikan Tinggi Proyek Penulisan dan Peningkatan Mutu Tenaga Kependidikan.