# AKADEMIA

ISSN NO. 1410-1315

VOL. 17 NO. 2 APRIL 2013

DITERBITKAN OLEH :

KOPERTIS WILAYAH – I ( PROVINSI ACEH – SUMATERA UTARA )

# AKADEMIA

ISSN NO. 1410-1315 VOL. 17 NO. 2 APRIL 2013


## PENGANTAR REDAKSI

Akademia terbitan edisi kali ini memuat 12 (dua belas ) tulisan dari berbagai bidang ilmu yang ditulis dosen-dosen PNS Kopertis Wilayah I dan dosen-dosen tetap Yayasan PTS Kopertis Wilayah I.

Evi Susilawati, dosen tetap Universitas Tjut Nyak Dhien, menulis tetang Pengaruh Efektivitas Komunikasi Edukatif Terhadap Semangat Belajar Mahasiswa Pada Mata Kuliah Pendidikan Kewarganegaraan (PKn). Gunawan, dosen tetap Sekolah Tinggi Ilmu Ekonomi Indonesia Banda Aceh, membahas masalah Pengaruh Gaya Kepemimpinan Terhadap Kinerja Pegawai. Masalah Kesehatan dalam akademia edisi ini ditulis oleh Meri Susanti, dosen Universitas Islam Sumatera Utara dengan judul Penerapan Logoterapi Untuk Meningkatkan Makna Hidup Pada Penderita Kanker Payudara Stadium Lanjut. Misdi, dosen tetap Universitas Prima Indonesia menganalisis tentang Analisis Time History Bangunan Dengan Base Isolator. Masalah Kedudukan Wali Nikah: Suatu kajian menurut Perspektif Ulama dan Undang-Undang Perkawinan, ditulis oleh Mustamam, dosen tetap Universitas Islam Sumatera Utara. Nazaruddin, dosen Universitas Samudara Langsa menulis tentang Karakteristik Termal beberapa Isolator Untuk Tangki Penyimpan Air Panas Surya. Masalah pendidikan di edisi ini ditulis oleh Rafuddin Silaban, dosen tetap Universitas Sisingamangaraja XII dengan judul Hubungan Persepsi Guru Terhadap Perilaku Kepemimpinan Kepala Sekolah Dengan Kinerja Guru Pada Sekolah Dasar Negeri Kecamatan Medan Petisah Medan. Roswita Sitompul, dosen tetap Universitas Islam Sumatera Utara, Asmah laili Yeon, dosen Universitas Utara Malaysia dan Anisah Che Ngah, dosen Universitas Kebangsaan Malaysia, menulis tentang Penyebab Terjadi Malpraktek Dokter di Indonesia dan Malaysia. Suprianto, dosen tetap Sekolah Tinggi Ilmu Kesehatan Helvetia, menulis tentang Formulasi dan Penentuan Orde Pelepasan Teofilin Sediaan Granul Campuran Kitosan Dengan Metilselulosa. Di bidang ilmu Teknik, Timbang Pangaribuan dan Parulian Siagian, dosen Universitas HKBP Nommensen membahas masalah Integrasi Persamaan Diferensial Orde Dua Menggunakan Metoda Runge Kutta Orde Empat.Yahya, dosen tetap Universitas Jabal Ghafur Sigli, membahas tentang Perbedaan Tingkat Laju Osmosis Antara Umbi Solunum tuberosum Dan Donocus carota. Zuraidah Nasution, dosen tetap Universitas Alwasliyah, menulis tentang Tinjauan Kesetaraan dan Keadilan Gender Dalam Konteks Bahasa dan Budaya.

Semoga Akademia dapat tampil dan hadir secara konsisten dan menjadi referensi yang bermanfaat bagi seluruh pembaca dan pemerhati ilmu pengetahuan.

Redaksi

# AKADEMIA

ISSN NO. 1410-1315 VOL. 17 NO. 2 APRIL 2013

## DAFTAR ISI

# INTEGRASI PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE DUA MENGGUNAKAN METODA RUNGE KUTTA ORDE EMPAT

Oleh

**1*. Timbang Pangaribuan 2**.Parulian Siagian**
*(Dosen Tetap Fak Teknik Universitas HKBP Nommensen Medan)*

*Abstract*

The differential equation is one of the important equations in the fileld of engineering technology, and many ways to solve that equation. In the field of control system technology, solving the differential equation is needed to perform the behaviour of the dinamical system. The Runge-Kutta Method is one of the methods to integrate the differential equation in the numeric form, especially the fourth runge-kutta fourth order method. Some of the differential equation consist of the second order or more, then to solve this equation using runge kutta, It is needed first to convert all differential equation to become some differential in first order, so we need also some runge-kuta together with every differential equations in the form of first order. Furthermore, the runge kutta method becomes complex according to the number of the first order, in differential equation used. In building the result in the form of graphics, we need simulation by mathlab program.

***Key words : Runge-Kutta fourth order, the first order differential equation, mathlab.***

## 1.PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Untuk mengungkapkan perilaku dinamik suatu sistem fisik seperti mekanik, listrik, hidrolik dan lain sebagainya, umumnya sistem fisik dimaksud dimodelkan dengan sistem matematik melalui persamaan diferensial. Pemodelan sistem fisik dapat diuraikan dengan persamaan diferensial dalam bentuk orde satu, orde dua bahkan sampai orde tinggi orde ***n***, tergantung perilaku sistem fisik dimaksud. Pemodelan sistem fisik diberikan dengan menggunakan persamaan diferensial dalam kawasan waktu kontinyu. Persamaan diferensial ada yang bersifat linier, tapi ada kalanya persamaan diferensial memiliki persamaan non-linier.

Solusi persamaan diferensial secara umum diberikan dalam bentuk eksponen, ada yang berupa solusi khusus dan ada yang berupa solusi partikulir, dan jumlah dari keduanya disebut dengan solusi umum. Kesulitan yang terjadi dalam menyelesaikan persamaan diferensial adalah menentukan solusi partikulir, karena fungsi masukan dapat bervariasi mulai dari konstanta, fungsi waktu, exponensial dan fungsi sinus.

Salah satu solusi yang diharapkan dalam memahami perilaku dinamik suatu sistem adalah dalam bentuk grafis, sehingga perilaku dinamik sistem dimaksud diamati melalui hasil grafis output sistem yang diperoleh. Hasil grafis dimaksud disebut dengan respon transien, dan respon transien memiliki karakteristik seperti maksimum overshoot, waktu overshoot dan waktu steady-state.

Untuk menentukan hasil dalam bentuk grafis, diperlukan data dalam bentuk numerik. Salah satu metoda pengintegrasian penyelesaian persamaan diferensial dalam bentuk numerik adalah metoda dengan Runge-Kutta. Metoda Runge-Kutta diuraikan dalam beberapa bagian, mulai dari orde dua, orde tiga dan orde empat. Metoda Runge-Kutta orde empat memiliki ketelitian lebih tinggi dibanding orde dua dan orde tiga.

### 1.2. Perumusan Masalah

Secara umum pengintegrasian persamaan diferensial menggunakan metoda Runge-Kutta berlaku untuk persamaan diferensial orde satu, sedangkan untuk persamaan diferensial orde dua, tiga dan seterusnya, maka harus dilakukan sendiri pengembangan dalam menyelesaikannya. Persamaan diferensial dalam orde dua atau lebih harus dibentuk menjadi sejumlah persamaan diferensial orde satu, sehingga setiap persamaan diferensial orde satu yang diperoleh diselesaikan secara simultan atau bersama-sama, sehingga setiap persamaan diferensial orde satu tersebut diselesaikan dengan menggunakan solusi Runge-Kutta.

Disisi lain, untuk membentuk sebuah persamaan diferensial orde ***n*** menjadi ***n*** buah persamaan diferensial orde satu, dilakukan dengan menggunakan persamaan yang dikenal dengan **persamaan ruang keadaan**. Persamaan ruang keadaan dibahas dalam ruang berdimensi ***n*** yang sumbu koordinatnya terdiri dari sumbu $x_1$, sumbu $x_2$, ......, sumbu $x_n$, yang disebut sebagai ruang keadaan. Setiap keadaan dimaksud dapat dinyatakan dengan suatu titik pada ruang keadaan, dan suatu titik tersebut menandakan keberadaan dari suatu persamaan diferensial orde satu.

Maka yang menjadi masalah adalah bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial, dimana persamaan diferensial dimaksud berada dalam orde terbatas sampai ***n***, dan akan diuraikan dalam bentuk persamaan diferensial orde satu sebanyak ***n*** buah, dan setiap persamaan diferensial orde satu tersebut secara bersamaan secara numerik deiselesaikan dengan metoda Runge-Kutta.

**1.3. Tujuan**

Adapun tujuan penulisan ini adalah untuk memberikan tahapan-tahapan dalam menyelesaikan persamaan diferensial orde terbatas ***n*** dengan metoda Runge-Kutta yang dilengkapi dengan program komputer berbasis matlab, sehingga para ilmuwan yang bergerak dalam dunia persamaan diferensial dapat menggunakan metoda dan program yang disajikan ini sebagai salah satu metoda dalam solusi persamaan diferensial orde dua atau lebih, baik sistem linier maupun sistem non-linier.

**2. Pembahasan**

**2.1. Uraian Persamaan Diferensial**

Deskripsi matematik dari karakteristik dinamik suatu sistem disebut model matematik. Langkah pertama dalam analisis suatu sistem dinamik adalah menurunkan modelnya, dan secara umum bentuk persamaan diferensial orde ke-n yang bersifat linier dapat dituliskan seperti pada persamaan (2-1),

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0\, y(t) = u(t) \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

dimana,

$a_{n-1}$, $a_1$, $a_0$ : adalah konstanta

$y(t)$: variabel output sebagai fungsi dari waktu

$u(t)$ : variabel input sebagai fungsi dari waktu

Dalam dunia sistem kendali bahwa persamaan (2-1) di atas diselesaikan dengan menggunakan metoda persamaan ruang keadaan dan metoda transformasi Laplace, dengan syarat diketahui semua kondisi awal untuk setiap waktu diferensial dimaksud.

Sedangkan persamaan diferensial dalam bentuk non-linier dapat berisikan unsur lain seperti sinus dan pangkat dua seperti dituliskan pada persamaan berikut.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \sin y\, \frac{dy}{dt} + a_0\, y = u$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + a_0\, y(t) = \sin(u(t)) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Adanya unsur sinus dalam persamaan dimaksud membuat tidak mungkin persamaan di atas diselesaikan dengan menggunakan metoda transformasi Laplace, walaupun syarat diketahui semua kondisi awal untuk setiap waktu diferensial dimaksud.

Persamaan diferensial (2-1) di atas dapat diuraikan menjadi sejumlah persamaan diferensial orde satu seperti dituliskan seperti pada persamaan (2-2).

Dalam hal ini terdapat sejumlah variabel $x_1$, $x_2$, ......, $x_n$ yang disebut dengan variabel keadaan dalam persamaan ruang keadaan orde ke-n, sebagai persamaan diferensial orde kesatu sebanyak n buah.

$$x_1 = y$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = x_3$$

.........

$$\frac{dx_{n-1}}{dt^{n-1}} = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} = x_n$$

$$\frac{dx_n}{dt^n} = \frac{d^n y}{dt^n} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \ldots\ldots - a_{n-1}x_n + u \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.(3)$$

**2.2. Solusi Persamaan Diferensial**

Berbagai metoda dapat digunakan dalam menyelesaiakan persamaan diferensial, baik secara analitik maupun dengan menggunakan proses transformasi seperti transformasi Laplace, tetapi secara numerikpun tidak kalah banyak metoda yang dapat digunakan, seperti metoda Euler, metoda Deret Taylor, metoda Heun, metoda Poligon, dan metoda Runge-Kutta dan mungkin masih ada metoda lainnya.

Contoh 1 :

Tinjau suatu persamaan diferensial orde satu berikut ini :

$$\frac{dy(t)}{dt} + a\, y(t) = b\, u(t)$$

Dua variabel $u$ dan $y$ sebagai fungsi waktu $t$. Fungsi masukan adalah $u(t)$ dan fungsi keluaran adalah $y(t)$, dengan $a$ dan $b$ adalah parameter konstan.

Dengan mengetahui kondisi awal $y(0) = y_0$, solusi persamaan diferensial orde kesatu dimaksud dengan menggunakan transformasi Laplace adalah,

$s\,Y(s) + a\,Y(s) = b\,U(s)$

atau dapat lagi disederhanakan menjadi,

$$Y(s) = \frac{b}{s+a}U(s)$$

Fungsi penggerak $U(s)$ dalam sistem kendali dapat terdiri dari fungsi unit step, fungsi ramp, fungsi eksponen atau fungsi sinus seperti ditunjukkan pada tabel 1.

Tabel 1. Jenis Fungsi Masukan

| No. | f(t) | F(s) | Nama fungsi |
|---|---|---|---|
| 1 | 1(t) | $\frac{1}{s}$ | unit step |
| 2 | t | $\frac{1}{s^2}$ | ramp |
| 3 | $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ | exponen |
| 4 | $A\sin wt$ | $A\frac{w}{s^2+w^2}$ | sinus |

Fungsi penggerak $U(s)$ dipilih salah satu dari Tabel 1 sesuai keperluan pengendalian. Misalnya yang dipilih adalah fungsi unit step, maka keluaran memiliki persamaan,

$$Y(s) = \frac{b}{s(s+a)}$$

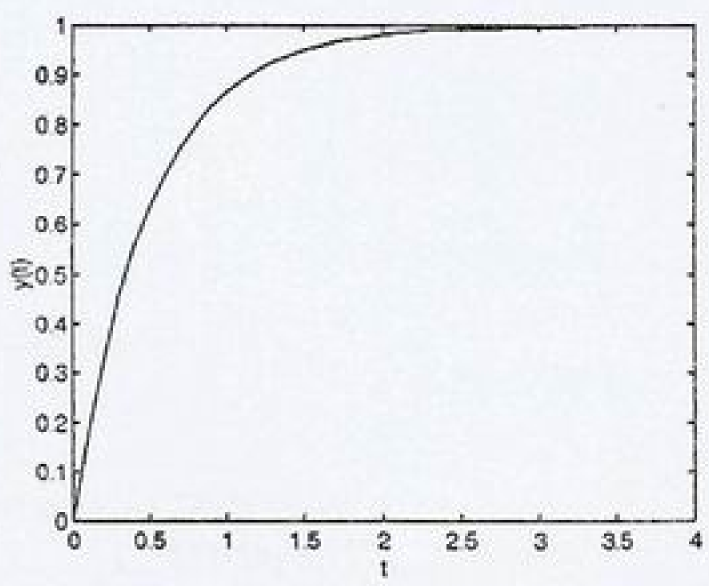
Dan invers transformasi Laplace dari persamaan di atas adalah,

$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{b}{s(s+a)}\right) = \frac{b}{a}\left(1-e^{-at}\right)$$

Jika diketahui nilai variabel $b = a = 2$, dan digambarkan dalam kurun waktu t = 4 detik, maka diperoleh hasil

$y(t) = 1 - e^{-2t}$

Dan hasil dalam bentuk grafik diperoleh seperti pada Gambar 1.




Gambar 1. Grafik $y(t)=1-e^{-2t}$

Jika persamaan diferensial orde 1 di atas diselesaikan dengan solusi umum persamaan diferensial orde 1, maka diuraikan sebagai berikut :

Untuk persamaan diferensial orde satu dengan bentuk,

$$a\frac{dy(t)}{dt} + b\,y(t) = f(t)$$

Maka solusi homogen persamaan diferensial orde satu $y_a$ adalah,

$$y_a = K_a\,e^{-(b/a)t}$$

Sedangkan solusi khusus $y_p$ untuk fungsi $f(t)$ yang berbeda diperoleh dengan,

$f(t) = 0$ maka $y_p = 0$

$f(t) = A$ , *konstanta* maka $y_p = K$

$f(t) = A\,e^{at}$ maka $y_p = K$ $e^{at}$

$f(t) = A\sin(wt)$ maka $y_p = K_c\cos(wt) + K_s\sin(wt)$

Sehingga solusi total $y_{total}$ persamaan diferensial orde satu adalah,

$$y_{total} = y_p + K_a\,e^{-(b/a)t}$$

Untuk contoh soal yang diberikan sebelumnya, maka solusi totla untuk persamaan diferensial orde satu dimaksud adalah,

Untuk $a = 1$ dan $b = 2$, dan untuk fungsi $f(t) = A = 2$

maka $y_p = 1$ dan $K_a = -1$, sehingga didapat

$$y(t) = 1 - e^{-2t}$$

Hasil ini sama dengan hasil yang diperoleh menggunanakan transformasi Laplace.

Contoh 2:

Tinjau persamaan diferensial memiliki bentuk linier orde dua seperti,

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0\,y(t) = b\,u(t)$$

Dan diketahui nila $a_1 = 1$, nilai $a_0 = 10$ dan nilai $b = 4$, maka persamaan di atas ditulis dengan,

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 10\,y(t) = 4u(t)$$

Dalam bentuk Laplace untuk kondisi awal $y(0) = 0$ dan $y(-1) = 0$, dengan masukan $u(t) = 1$, diperoleh hasil Laplace persamaan diferensial orde dua di atas yaitu $Y(s)$ dan pemisahannya dengan,

$$Y(s) = \frac{4}{s(s^2+s+10)} = \frac{m_1}{s} + \frac{m_2\,s + m_3}{s^2+s+10}$$

Nilai parameter pemisahan $m_1$, $m_2$ dan $m_3$ diperoleh seperti berikut :

$$m_1 (s^2 + s + 10) + (m_2 s + m_3) s = 4$$

atau

$$m_1 + m_2 = 0$$
$$m_1 + m_3 = 0$$
$$10\, m_1 = 4$$

Diperoleh, $m_1 = 0{,}4$ dan $m_3 = -0{,}4$ dan $m_2 = 0{,}4$ sehingga didapat,

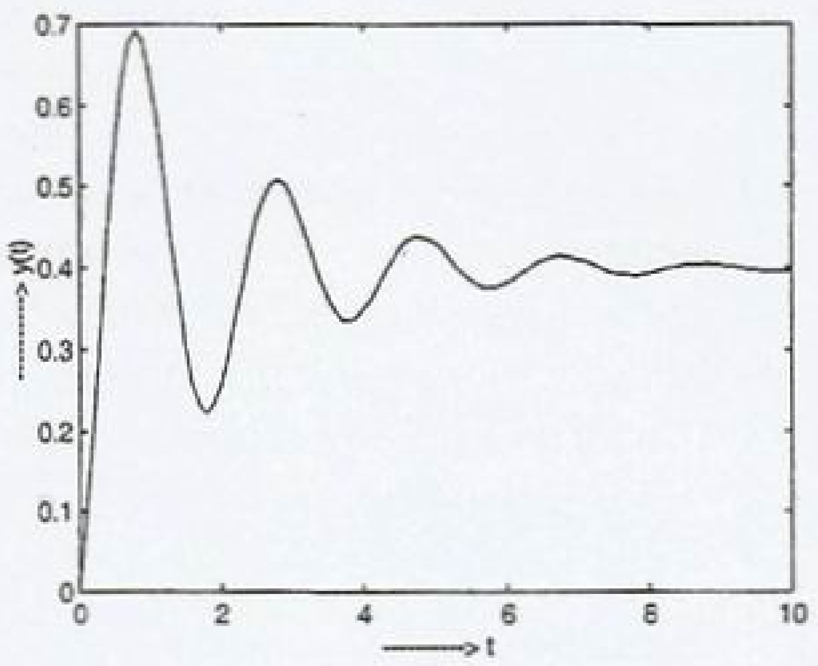
$$y(t) = L^{-1}\left[Y(s)\right] = L^{-1}\left[0{,}4\left(\frac{1}{s} - \frac{s-1}{s^2+s+10}\right)\right]$$

Dan diperoleh,

$$y(t) = 0{,}4$$

$$\left[1 - e^{-t/2}\left(\cos(\sqrt{10}\,t) + \frac{3}{2\sqrt{10}}\sin(\sqrt{10}\,t\right)\right]$$

Dan hasil dalam bentuk grafik diperoleh seperti pada Gambar 2.

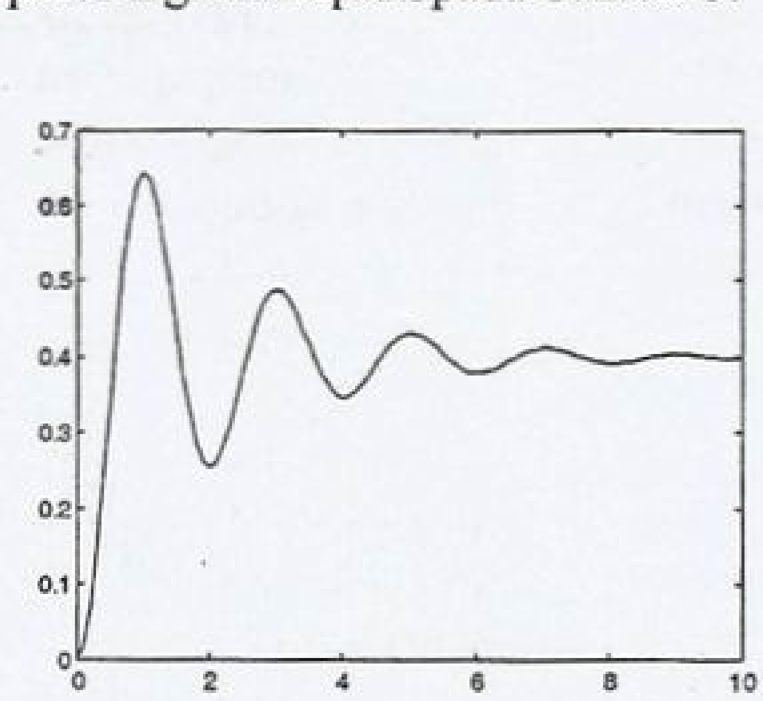



Gambar 2. Grafik *y(t)* Plant Orde Dua Versi Laplace

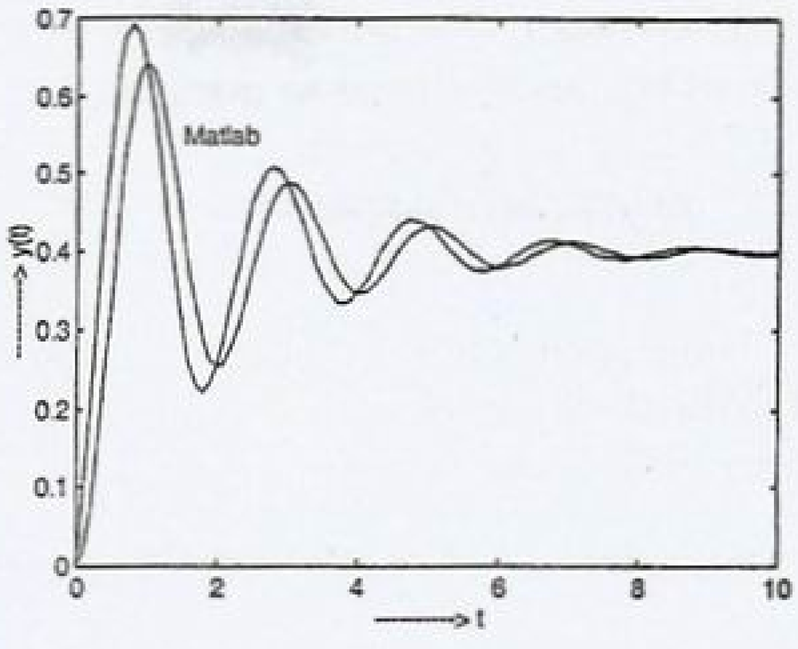
Dengan menggunakan perintah langsung matlab, yaitu dengan memberi perintah,

```
t=0:0.1:10        ;
y=step(4,[1 1 10],t)   ;
plot(t,y,'w')
```

diperoleh grafik seperti pada Gambar 3.




Gambar 3. Grafik *y(t)* Plant Orde Dua Versi Matlab




Gambar 4. Grafik *y(t)* Versi Laplace dan Matlab

Dari uraian yang diberikan, maka dapat disimpulkan bawa penggunaan metoda transformasi Laplace dan metoda solusi umum persamaan diferensial cukup sulit, apalagi jika untuk sistem dengan orde yang tinggi mulai orde tiga ke atas. Untuk itu diperlukan metoda numerik seperti metod pengintegralan Runge-Kutta sehingga solusi dalam bentuk angka dan grafis lebih mudah diperoleh.

### 2.3. Metoda Runge Kutta

Metoda Runge-Kutta memiliki ketelitian yang tinggi dalam integrasi persamaan diferensial, dan karena metoda ini berupa metoda numerik, maka metoda ini sangat cocok dilalukan dengan komputasi melalui komputer digital.

Berdasarkan survey yang dilakukan dalam bentuk literatur dan melalui tulisan ilmiah pada internet, ditemukan beberapa bentuk solusi yang diberikan oleh Runge-Kutta, yaitu Runge-Kutta Orde Dua, Runge-Kutta Orde Tiga, Runge-Kutta Orde Empat, Runge-Kutta Gill Orde Empat, dan Runge-Kutta Fehlberg pada Update Orde Empat dan Orde Lima.

Bentuk umum metoda Runge-Kutta orde-n ialah,

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + \dots + a_n k_n$$

dengan $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah tetapan, dan $k_1, k_2, \dots, k_n$ ialah,

$$k_1 = h\, f(t_r, y_i)$$

$$k_2 = h\, f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1)$$

$$k_3 = h\, f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 + q_{22} k_2)$$

....

$$k_n = h\, f(t_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 + q_{n-1,2} k_2 + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1}) \qquad (4)$$

Dalam hal ini variabel $h$ adalah interval waktu dalam iterasi yang dilakukan, dan variabel $k_1, k_2, \dots, k_n$ adalah variabel persamaan Runge-Kutta menurut orde yang digunakan, sehingga dalam hal ini $y_{r+1}$ adalah hasil akhir dari pengintegralan persamaan diferensial untuk satu interval waktu dari $h$ untuk $y_r$. Variabel lainnya yaitu $p_i$ dan $q_i$ adalah parameter yang dipilih tergantung metoda yang digunakan.

Ketentuan yang diberikan dalam pengintegralan secara numerik adalah :

- Nilai $a_r$ dan $k_i$ dipilih sedemikian rupa sehingga meminimumkan galat per langkah untuk memperoleh hasil pengintegralan terbaik.
- Orde metoda = n.

**2.4. Metoda Runge-Kutta Orde Empat**

Bentuk persamaan diferensial yang akan diintegrasikan dengan metoda Runge-Kutta ialah,

$$f(t,y) = \frac{dy(t)}{dt} = m\ y(t) + cu(t)$$

Dalam hal ini $u$ adalah variabel masukan, $y$ adalah variabel keluaran dan $t$ adalah waktu, dengan $m$ dan $c$ adalah konstanta.

Solusi Metoda Runge-Kutta untuk pengintegralan persamaan diferensial (3) adalah Runge-Kutta orde empat, dan bentuk persamaan yang umum digunakan dituliskan dengan,

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + a_4 k_4$$

Pada metoda ini, ditentukan $a_1 = a_4 = 1/6$ dan $a_2 = a_3 = 2/6$ sehingga,

$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \tag{2-8}$$

Keempat variabel Runge-Kutta $k_1$, $k_2$, $k_3$ dan $k_4$ diperoleh dengan,

$$k_1 = h\,(m\,y_i + c\,u)$$
$$k_2 = h\,(m\,(y_i + k_1/2) + c\,u)$$
$$k_3 = h\,(m\,(y_i + k_2/2) + c\,u)$$
$$k_4 = h\,(m\,(y_i + k_3) + c\,u)$$

**2.5. Penggunaan Ganda Metoda Runge Kutta**

Seperti diuraikan sebelumnya bahwa metoda Runge-Kutta memiliki ketelitian yang tinggi dalam integrasi persamaan diferensial. Penggunaan metoda ini dalam metoda numerik, dapat dikembangkan dengan menggunakan variabel ganda yang tetap mengacu pada metoda Runge-Kutta yang sudah diuraikan sebelumnya.

Persamaan diferensial dapat terbentuk dalam bentuk orde kedua, orde ketiga hingga orde ke n seperti pada persamaan (1). Jika persamaan diferensial terdiri dari orde dua atau lebih, maka metoda Runge-Kutta hanya dapat digunakan setelah semua persamaan diferensial dibentuk kedalam sejumlah persamaan orde satu seperti pada persamaan (3).

Tinjau sebuah persamaan diferensial orde dua seperti berikut :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0\,y(t) = b\,u(t)$$

Mengacu ke persamaan (2-2), jika persamaan di atas dibentuk menjadi persamaan diferensial orde satu, maka haruslah dibuat dengan aturan berikut.

Definisikan,

$$x_1(t) = y(t)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} = x_2(t)$$

Maka persamaan diferensial orde dua di atas menjadi,

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -a_0\,x_1(t) - a_1\,x_2(t) + bu(t)$$

Terlihat bahwa terdapat dua persamaan diferensial orde satu dari bentuk persamaan diferensial orde dua sebelumnya.

Kondisi sekarang ini, kedua persamaan diferensial dimaksud harus diselesaikan secara bersamaan dengan menggunakan metoda Runge-Kutta. Oleh karena itu harus dipilih dua variable sekaligus sebagai variable Runge-Kutta yang harus digunakan secara bersamaan pula. Misalkan dalam hal ini dipilih dua variable $k$ dan $l$, dan bentuk Runge-Kutta orde empat penyelesaian persamaan diferensial orde dua di atas dapat dituliskan dengan :

$$k_1 = h\,x_{20}(t)$$
$$l_1 = h\,(-a_0\,x_{10}(t) - a_1\,x_{20}(t) + b\,u_{(t)})$$
$$k_2 = h\,(x_{20}(t) + l_1/2)$$
$$l_2 = h\,(-a_0\,(x_{10}(t)+k_1/2) - a_1\,(x_{20}(t)+l_1/2)) + b\,u(t))$$
$$k_3 = h\,(x_{20}(t) + l_2/2)$$
$$l_3 = h\,(-a_0\,(x_{10}(t)+k_2/2) - a_1\,(x_{20}(t)+l_2/2)) + b\,u(t))$$
$$k_4 = h\,(x_{20}(t) + l_3)$$
$$l_4 = h\,(-a_0\,(x_{10}(t)+k_3) - a_1\,(x_{20}(t)+l_3)) + b\,u(t))$$

Dan hasil pengintegrasian pertama diperoleh dengan,

$$x_{11} = x_{10} + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

$$x_{21} = x_{20} + (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)/6$$

$x_{01}$ dan $x_{02}$ adalah nilai awal dari persamaan diferensial pertama dan kedua yang berperan sebagai $x(t)$, sedangkan $x_{11}$ $x_{21}$ dan adalah nilai hasil pengintegrasian setelah waktu $h$ dan berperan sebagai $x(t+h)$.

Dari uraian tentang penyelesaia persamaan diferensial orde dua di atas, selanjutnya jika diketahui ada persamaan diferensial orde 3, orde 4 hingga orde n, maka demikianlah prosesnya berlangsung, dibentuk 3 atau empat bahkan n variabel lagi, untuk membangun variabel Runge-Kutta.

### 2.6. Program Simulasi MATLAB

Kecepatan komputer digital dalam melakukan operasi aritmatika sangat memungkinkan banyak pengguna untuk menggunakan pendekatan dalam menyelesaikan integrasi persamaan diferensial. Dengan komputer digital maka analisis dapat berkembang dan tidak hanya terbatas pada orde kesatu dan kedua yang dapat dihitung manual, sehingga dapat diselesaikan berbagai persamaan dengan orde yang tinggi dan dengan jumlah variabel yang banyak.

Metoda numerik selanjutnya diselesaikan dengan menggunakan program komputer berbasis Matrix Laboratory atau dikenal dengan nama **matlab**. Dalam hal ini matlab yang akan digunakan adalah versi 4,2c.

Pemrograman dalam matlab tidak berbeda dari program lain seperti basic dan pascal, dapat memiliki program utama dan dapat memiliki sejumlah sub-program yang akan dieksekusi secara bersama-sama. Yang menarik dan penting dalam matlab adalah bahwa telah tersedia sejumlah fungsi penting dan sub-rutin program yang dapat digunakan secara langsung, misalnya matriks dan prosesnya, menyediakan sub-rutin seperti invers, sub-rutin pembuatan grafis juga sudah tersedia secara lengkap. Pengguna program ini juga dapat menambahkan sub-program baru yang dibuat secara tersendiri dan digunakan secara bersama-sama dengan sub-program yang sudah ada disediakan matlab.

Program Simulasi ini bertujuan memberikan cara penyelesaian persamaan diferensial orde satu dan orde dua yang diselesaikan dengan berbagai bentuk solusi dengan menggunakan Metoda Runge-Kutta.

Dipilih persamaan diferensial orde dua seperti berikut ini :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 10\,y(t) = 4\,u(t)$$

Kondisi awal untuk kedua soal di atas semuanya adalah nol, dan nulai fungsi u(t) diberikan dengan fungsi unit step.

Program matlab yang diperlukan dalam melakukan simulasi pengintegrasian persamaan diferensial menggunakan metoda Runge-Kutta, terdiri dari dua bagian yaitu, program utama dan sub-program. Sub-Program atau adalah program yang dibuat menggunakan bentuk *function* yang digunakan menyelesaikan setiap step daiam penyelesaian secara numerik persamaan Runge-Kutta.

**a. Program Utama**

```
%       Program Utama Plant Orde Dua
%       d2y/dt2 + dy/dt + 10 y = 4 u
%       Sinyal Masukan u(t) = 1.
clear
u=1   ;
x10=0  ;
x20=0  ;
h=0.1  ;
tf=10  ;
for i = 1:tf/h
t(i) = (i-1)*h              ;
x1(i)=x10                   ;
x2(i)=x20                   ;
[x11,x21]=rk2p2h(x10,x20,h,u)          ;
x10=x11                         ;
x20=x21                         ;
end
plot(t,x1,'w')
xlabel('————————>t')
ylabel('————————>y(t)')

% Selesai.
```

**b. Sub-rutin**

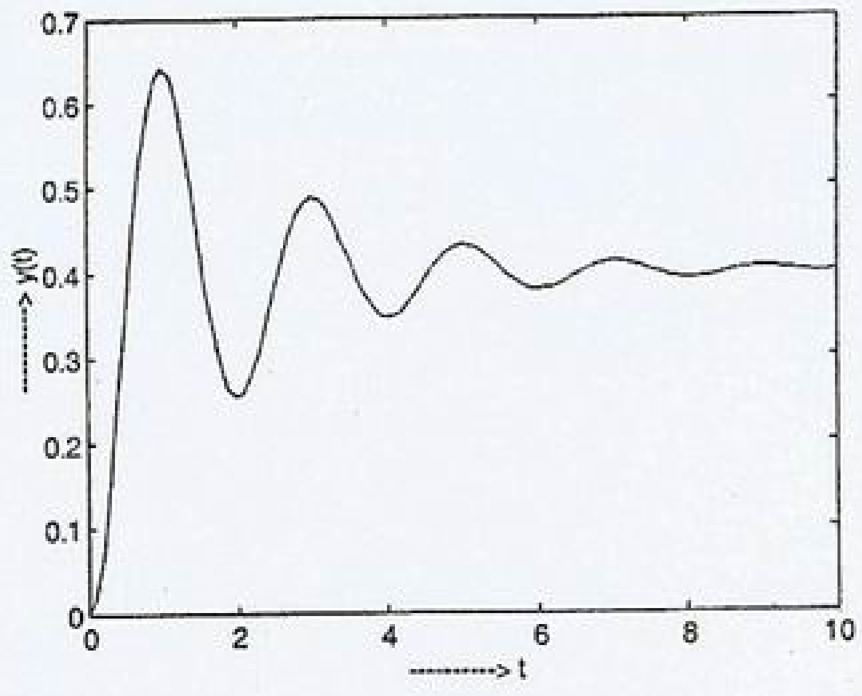
```
function [x11,x21]=rk3p2(x10,x20,h,u)
% Orde Dua metoda Heun
K1=h*x20                 ;
L1=h*(-10*x10-x20 +4*u)      ;
K2=h*(x20+L1/2)              ;
L2=h*(-10*(x10+K1/2)-(x20+L1/2) +4*u);
K3=h*(x20+L2/2)              ;
L3=h*(-10*(x10+K2/2)-(x20+L2/2) +4*u);
K4=h*(x20+L3)            ;
L4=h*(-10*(x10+K3)-(x20+L3) +4*u)    ;
K=(K1+2*K2+2*K3+K4)/6                ;
L=(L1+2*L2+2*L3 +L4)/6               ;
x11=x10+K                ;
x21=x20+L                ;
% return.
```

## 3. Hasil Penelitian

Hasil penelitian yang diperoleh adalah dalam bentuk numerik dan dalam bentuk grafik, baik untuk plant orde satu maupun untuk plant orde dua. Hasil penelitian diperoleh dengan menjalankan program yang diberikan pada bab 3. Semua program dibuat dalam satu direktori RK, untuk memudahkan setiap program utama dapat menggunakan sub-program yang diberikan.

Pasti akan ada muncul pertanyaan, apakah hasil yang diperoleh akan dapat disebut akurat? Tentu dapat, jika hasil yang diperoleh dibandingkan dengan sebuah referensi, dan referensi yang diakui adalah hasil referensi menggunakan solusi yang diperoleh melalui program standard matlab, karena program ini sudah berstandar internasional yang dibangun oleh Mathworks Inc.

Setelah setiap pasangan program utama dan sub-rutin dijalankan secara bersamaan, diperoleh hasil seperti diberikan berikut ini.




Gambar 2. Grafik Plant Orde Dua Runge-Kutta Orde Empat

Tabel 2. Hasil Numerik Plant Orde Dua Metoda Runge-Kutta Empat

| t | Matlab | Orde 4 | E4 | | Laplace | Ea |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 0.0000 |
| 0.10 | 0.0192 | 0.0192 | 0.0000 | | 0.0945 | -0.0753 |
| 0.20 | 0.0725 | 0.0725 | 0.0000 | | 0.2096 | -0.1371 |
| 0.30 | 0.1516 | 0.1516 | 0.0000 | | 0.3321 | -0.1805 |
| 0.40 | 0.2467 | 0.2466 | 0.0001 | | 0.4495 | -0.2028 |
| 0.50 | 0.3471 | 0.3471 | 0.0000 | | 0.5510 | -0.2039 |
| 0.60 | 0.4430 | 0.4430 | 0.0000 | | 0.6282 | -0.1852 |
| 0.70 | 0.5258 | 0.5257 | 0.0001 | | 0.6760 | -0.1502 |
| 0.80 | 0.5887 | 0.5887 | 0.0000 | | 0.6925 | -0.1038 |
| 0.90 | 0.6279 | 0.6279 | 0.0000 | | 0.6792 | -0.0513 |
| ... | ... | ... | | | ... | |
| ... | ... | ... | | | ... | |
| ... | ... | ... | | | ... | |
| 9.50 | 0.4012 | 0.4012 | 0.0000 | | 0.3977 | 0.0035 |
| 9.60 | 0.4001 | 0.4001 | 0.0000 | | 0.3970 | 0.0031 |
| 9.70 | 0.3991 | 0.3991 | 0.0000 | | 0.3967 | 0.0024 |
| 9.80 | 0.3983 | 0.3983 | 0.0000 | | 0.3967 | 0.0016 |
| 9.90 | 0.3977 | 0.3977 | 0.0000 | | 0.3970 | 0.0007 |
| | | | | | | |
| | | | 0.0000 | | | -0.0078 |

Hasil pengintegralan persamaan diferensial orde dua dengan metode Runge-Kutta orde empat, diperoleh data seperti pada Tabel 2. Hasil numeric Runge-Kutta, jika dibandingkan dengan hasil analitik invers Transformasi Laplace dan dengan hasil yang diberikan matlab, memberikan kesalahan rata-rata pada ketiga metoda dengan nilai sama yaitu mendekati no, kecuali analitik menggunakan Laplace dengan error -0,0078. Dari angka yang kecil ini, dapat dikatakan metoda Runge-Kutta ini sangat akurat dibanding hasil analitik, dan memenuhi hasil yang diberikan oleh standard MATLAB.

**4.Kesimpulan**

Dari keseluruhan uraian solusi persamaandiferensial menggunakan metoda Runge-Kutta, dari orde dua sampai orde empat, dan dengan menggunakan perangkat lunak matlab sebagai alat pemogram, maka diberikan kesimpulan sebagai berikut :

1. Contoh yang diberikan sebagai plant yaitu plant orde satu dan plant orde dua, dirasa cukup mewakili persamaan diferensial. Dari contoh ini dapat dilihat beberapa trik dalam membangun persamaan Runge-Kutta sesuai ordenya.
2. Solusi Runge-Kutta orde empat disarankan sebagai suatu metoda yang tepat dalam solusi persamaan diferensial, dan hasilnya pun mendekati solusi standar yang diberikan oleh matlab.

**DAFTAR PUSTAKA**

Finizio N & Ladas G,1988. Penerjemah : Widiarti Santoso, Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern, Penerbit Erlangga, Jakarta

Frank Ayres, Jr, PhD. 1981 Differential Equations, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill International Book Company, Singapore

Katsuhiko Ogata, 1985 Teknik Kontrol Automatik (Sistem Pengaturan), Jilid 1, Penerbit Erlangga, Jakarta

Katsuhiko Ogata,1985 Teknik Kontrol Automatik (Sistem Pengaturan), Jilid 2, Penerbit Erlangga, Jakarta

Steven C. Chapra,1991 Metoda Numerik, Penerbit Erlangga, Jakarta,

Shoichiro Nakamura,1991 Applied Numerical Methods With Software, Prentice -Hall International Inc, London.

Bahram Shahian,1993. Control System Design Using Matlab, Prentice -Hall International Editions, London..

Biodata:

*. ***Timbang Pangaribuan.*** *Dosen Tetap Fak Teknik Prodi Teknik Elektro dengan konsentrasi . Robotika.*

** ***Parulian Siagian*** *Dosen Tetap Fak Teknik Prodi Teknik Mesin dengan konsentrasi Konstruksi dan Perancangan.*