BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan ilmu dan teknologi sangat berpengaruh pada kemajuan jaman, tentunya diikuti oleh pembangunan-pembangunan yang semakin pesat. Seiring perkembangan ilmu dan teknologi perkembangan peraturan berbagai fasilitas yang berupa sarana dan prasarana di Indonesia sangat pesat. Terutama dalam perkembangan prasarana fisik yang hampir pada setiap aspek kegiatan sehari-hari.

Dalam perencanaan struktur, pada umumnya seorang perencana struktur memilih bentuk struktur yang prismatic, artinya struktur yang memiliki penampang yang seragam sepanjang bentang struktur. Namun pada kebutuhan arsitektural, struktur non prismatic lebih banyak digunakan. Struktur non prismatic ialah struktur yang mempunyai penampang yang tidak seragam. Dengan bentuk yang tidak seragam, bukan berarti terjadi pengurangan pada keamanan struktur.

Struktur yang umumnya terdiri atas balok dan kolom tentu tidak lepas dengan apa yang dimaksud lendutan dan tekuk. Lendutan biasanya terjadi pada balok dan tekuk tidak lepas dari bagian kolom. Balok merupakan elemen struktur yang sangat penting disuatu bangunan. Dalam perencanaan konstruksi balok direncanakan kuat menahan gaya-gaya yang mungkin akan terjadi sesuai perhitungan beban, baik berupa gaya vertical maupun gaya horizontal. Balok merupakan struktur lentur yang mempunyai karakteristik yang sangat rumit karena banyak gaya-gaya yang diterimanya sehingga rawan terjadinya kerusakan

1.2 Maksud dan Tujuan

Adapun maksud penulisan ini adalah agar penulis dapat mengetahui dan memahami metode finite difference yang digunakan untuk menganalisis balok prismatic dan non prismatic.

Sedangkan tujuan dari penulisan ini adalah untuk mengetahui besaran lendutan dan tekuk pada balok prismatic dimana balok prismatic memiliki penampang I yang seragam dan non prismatic yang mempunyai nilai I yang tidak seragam dengan menggunakan metode *Finite Difference* dibandingkan dengan metode analitis.

1.3 Rumusan Masalah

Dalam penyelesaian Tugas Akhir ini adapun permasalahan yang akan dibahas adalah :

1. Balok yang menerima beban lateral (beban merata dan beban terpusat) dan beban aksial (beban horizontal) ditinjau dengan beberapa diskrit
2. Nilai P_{cr} dari jenis balok prismatic dan non prismatic
3. Nilai lendutan jika nilai $P_{horizontal}$ adalah 0
4. Nilai lendutan jika diberi nilai $P_{horizontal}$

1.4 Batasan Masalah

Dalam Tugas Akhir ini penulis membatasi permasalahan pada penulisan, yaitu :

1. Dimensi yang digunakan pada penulisan ditentukan oleh penulis
2. Balok tumpuan sederhana, sendi dan rol
3. Beban vertical dan beban horizontal sebagai akibat tekuk
4. Menghitung nilai lendutan dan beban kritis
5. Metode yang digunakan untuk penulisan adalah metode *Finite Difference*
6. Nilai Diskrit yang dipakai kelipatan 2,4, dan 6

1.5 Sistematika Penulisan

BAB I. PENDAHULUAN

Berisi Latar Belakang, Maksud dan Tujuan, Perumusan Masalah, Batasan Masalah, Sistematika Penulisan.

BAB II. TINJAUAN PUSTAKA

Berisi dasar Teori Lendutan dan tekuk pada balok serta balok prismatic dan non prismatic.

BAB III. METODOLOGI PENELITIAN

Berisi tentang penjabaran Metode Finite Difference dan Metode Analisis.

BAB IV. ANALISA DAN PEMBAHASAN

Berisi analisa perhitungan balok tumpuan sederhana dengan menggunakan metode Finite Difference dibandingkan dengan hasil analisis

BAB V. KESIMPULAN DAN SARAN

Berisi kesimpulan dari hasil pengamatan dan analisa serta saran yang dapat digunakan untuk pelaksanaan hasil perencanaan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Umum

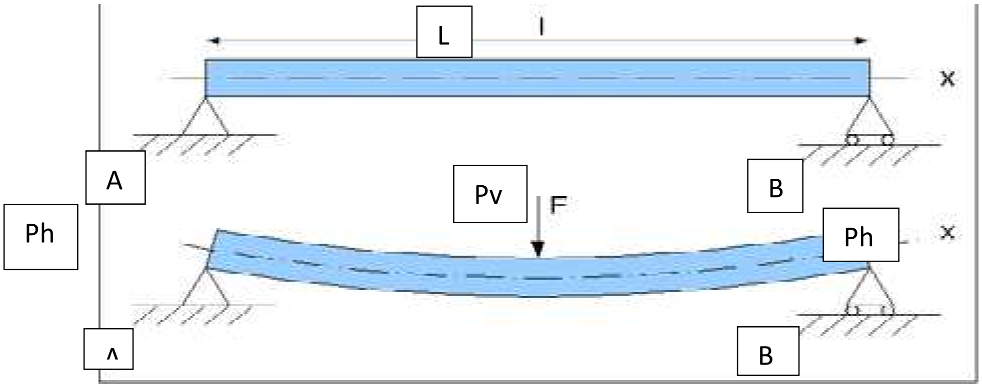
Finite Difference Method merupakan metode penyelesaian numerik untuk mencari solusi persamaan differensial parsial yang awalnya diperkenalkan dalam menyelesaikan persamaan fisika pada tahun 1930-an. Metode ini menyelesaikan perssamaan differensial dengan membagi bidang menjadi sejumlah berhingga pias segiempat. R. Sri Pawening (2005) menggunakan penerapan metode *finite difference* dalam persamaan perpindahan panas sebuah batang besi secara konduksi dengan persamaan parabolic skema eksplisit, implisit, dan Crank-Nicholson. Odaligo Ziduhu Lombu (2013) menerapkan metode beda hingga pada persamaan Schrodinger dalam partikel dengan potensial halang dilakukan dengn pendekatan numerik dengan cara mengkonversikan metode beda hingga kedalam persamaan Schrodinger, kemudian di ubah dalam bentuk diskrit dan diformulasikan dalam bentuk program computer tersebut berupa visualisasi. Menurut Soetrisno (2015) pengaplikasian metode ini meliputi pendiskritan terhadap persamaan kekekalan massa dan kekekalan momentm dalam dua dimensi yaitu arah x dan arah y.

2.2 Struktur Balok

Secara sederhana, balok sebagai elemen lentur digunakan sebagai elemen penting dalam konstruksi. Balok mempunyai karakteristik internal yang lebih rumit dalam memikul beban dibandingkan dengan jenis elemen struktur lainnya. Pada system structural yang ada di gedung, elemen balok adalah elemen yang paling banyak digunakan dengan pola berulang.

Tegangan actual yang timbul pada balok tergantung pada besar dan distribusi material pada penampang melintang elemen struktur. Semakin besar balok maka semakin kecil tegangannya. Luas penampang dan distribusi beban merupakan salah satu hal yang penting. Perbedaan tinggi suatu elemen berpengaruh terhadap kemampuannya dalam memikul lentur.

Variabel berikut ialah yang penting dalam desain balok yaitu jarak antara beban-beban dan perilaku kondisi tumpuan balok. Seperti tumpuan jepit yang lebih kaku dengan keadaan ujung yang dapat berputar bebas. Balok dengan tumpuan jepit dapat memikul beban terpusat ditengah bentang dua kali lebih besar daripada balok yang non jepit diujungnya.



Gambar 2.1 Struktur balok tumpuan sendi-rol yang diberi gaya Pv,Ph

Gambar 2.2 Struktur balok tumpuan sendi-rol yang diberi gaya lateral

2.3 Analisa Balok

2.3.1. Tegangan Lentur

Pada umumnya balok, tegangan lentur yang bervariasi secara linier pada suatu penampang merupakan tanggapan atas aksi momen lentur eksternal yang ada pada balok ditik tersebut. Hubungan antara tegangan lentur *fy*, parameter loaksi *y*, besaran penampang *I* dapat dinyatakan dalam hubungan berikut :

$$Fy = (M.\,y.\,\frac{1}{I})$$

- *apabila M membesar, maka fy membesar*
- *apabila y membesar, maka fy membesar*
- *apabila I membesar, maka fy membesar*

Tegangan lentur tidak terlalu peka terhadap perubahan lebar penampang. Untuk momen dan tinggi penampang konstan, memperlebar penampang dua kali akan memperkecil tegangan lentur menjadi setegahnya. Bila tinggi balok menjadi dua kali (dengan lebar yang tetap), akan menyebabkan tegangan lentur mengecil menjadi seperempatnya

Untuk penampang yang tak simetris, pusat lokasi titik berat tidaklah tepat berada pada posisi tengah tinggi penampang. Penentuan dimensi penampang melintang pada balok sederhana simetris yang memikul momen lentur tidaklah sulit. Pemilihan bahan dipilih sehingga diperoleh tegangan ijin, kemudian ditentukan ukuran penampang yang dibutuhkan berdasarkan kemampuan tegangan lentur actual pada balok yang sama atau lebih kecil dari taraf tegangan lentur yang diijinkan. Kelebihan tegangan terjadi apabila tegangan actual pada titik tersebut melampaui tegangan izin yang ditentukan dan tentukan hal ini tidak diinginkan.

2.3.2. Lendutan/Defleksi

Defleksi pada balok disebabkan karena adanya lendutan balok akibat beban. Pembebanan yang terjadi ialah pembebanan vertical dimana terjadi perubahan bentuk pada balok dalam arah y. Deformasi pada balok secara sangat mudah dijelaskan berdasarkan defleksi balok dari posisinya sebelum mengalami pembebanan. Defleksi diukur dari permukaan netral awal menuju posisi setelah terjadi deformasi.

Hal-hal yang mempengaruhi terjadinya defleksi yaitu ;

1. Kekakuan batang

Jika keadaan batang semakin kaku maka lendutan batang akan semakin kecil. Kekakuan batang ini meliputi tinggi batang/balok yang diuji. Semakin tinggi keadaan balok atau batang maka akan meningkatkan kekakuan pada batang tersebut, atau biasa disebut dengan Momen Inersia.

2. Keadaan Gaya

Besar-kecilnya gaya yang diberikan pada batang berbanding lurus dengan besarnya defleksi yang terjadi. Dengan artian bahwa semakin besar beban yang dialami atau diberikan pada batang/balok maka defleksi yang terjadi akan semakin besar pula.

3. Jenis Tumpuan

Jumlah reaksi dan arah pada tiap tumpuan berbeda-beda. Karena itu besarnya defleksi pada penggunaan tumpuan yang berbeda beda tidaklah mempunyai nilai yang sama. Semakin banyak reaksi dari tumpuan yang melawan gaya dari beban maka defleksi yang terjadi pada tumpuan rol lebih besar daripada tumpuan pin dan defleksi yang terjadi pada tumpuan pin lebih besar dari tumpuan jepit

4. Jenis Beban

Keadaan beban yang terdistribusi merata dengan keadaan beban titik memiliki kurva defleksi yang berbeda-beda. Pada beban terdistribusi merata slope yang terjadi pada bagian batang yang paling dekat lebih besar dari slope titik. Penyebabnya ialah pada beban terdistribusi merata sepanjang batang mengalami beban sedangkan pada beban titik hanya terjadi pada titik yang diberikan beban saja.

Defleksi(Δ) pada suatu titik tergantung pada beban *P* atau *w*, panjang bentang balok *L*, dan berbanding terbalik dengan kekakuan balok. Dengan demikian dapat dinyatakan bahwa:

- *apabila w bertambah, maka* Δ *bertambah*
- *apabila L bertambah, maka* Δ *bertambah*
- *apabila I bertambah, maka* Δ *berkurang*
- *apabila E bertambah, maka* Δ *berkurang*

2.3.3. Tekuk Lateral pada Balok

Pada balok yang dibebani dapat terjadi tekuk lateral dan terjadi keruntuhan sebelum seluruh kekuatan penampang diperoleh. Fenomena tekuk lateral pada balok serupa dengan yang terjadi pada rangka batang. Ketidakstabilan dalam arah lateral terjadi akibat gaya tekan yang timbul dari arah atas balok dan didukung oleh ketidakmampuan kekakuan balok menerima gaya lateral. Diasusmsikan bahwa jenis kegagalan tekuk lateral ini dapat terjadi akibat penampang balok dengan tegangan dengan taraf yang relative rendah.

Pencegahan tekuk lateral dapat dilakukan dengan cara :

1. Membuat balok cukup kaku dalam arah lateral
2. Membuat/menggunakan pengaku/pengekang lateral

Apabila balok digunakan untuk menumpu tutup atap atau system yang lain, pengekang dengan sendirinya diberikan oleh elemen sekunder tersebut. Apabila balok digunakan pada situasi dimana jenis pengekang tersebut tidak mungkin digunakan maka balok dapat dibuat menjadi kaku dalam arah lateral dengan memperbesar dimensi transversal didaerah atas balok.

2.3.4. Gaya Geser dan Momen Lentur

Sebuah batang tidak hanya mencakup dalam hal keseimbangan secara keseluruhan, tetapi gaya internal dan momen-momen menjaga keseimbangan static semua bagian batang tersebut. Keseimbangan internal ini dijaga oleh gaya-gaya geser (Q) dan momen-momen lentur (M).

Harga-harga Q dan M pada sembarang posisi disepanjang batang diperoleh dengan mempertimbangkan keseimbangan pada bagian-bagian batang. Secara umum dinyatakan bahwa gaya geser (Q) adalah penjumlahan aljabar total gaya-gaya eksternal yang bekerja pada sembarang satu sisi penampang yang ditinjau dan momen lentur (M) adalah jumlah total aljabar momen-momen gaya eksternal yang bekerja pada sembarang satu sisi penampang yang ditinjau.

Konvensi atau perjanjian tanda buat Q dan M yang digunakan dalam buku ini ialah bahwa gaya ke bawah terhadap bagian kiri penampang yang ditinjau dianggap memberikan harga positif untuk Q dan M.

Dengan memandang keseimbangan pada sebagian kecil panjang, dapat dibuktikan bahwa :

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

$$w = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}$$

dimana x adalah posisi sepanjang atang dan w adalah beban per satuan panjang.

2.3.5. Lenturan Batang

Misalkan sebuah batang mempunyai defleksi (lenturan) v yang berubah disepanjang batang itu (x diukur dari sebuah ujung). Kalau lendutan ini kecil, lengkungan batang pada sembarang posisi menurut panjangnya diberikan oleh :

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Dan kemudian menjadi persamaan sebagai berikut :

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M$$

Lenturan yang ditimbulkan oleh geseran biasanya diabaikan. Lenturan tersebut dapat berarti untuk beberapa jenis batang, misalnya bahan berlapis *(sandwich)* yang mengandung inti yang flexible semacam plastic berbusa.

2.3.6. Aspek Lain dari Lenturan

Aspek-aspek lain dari lenturan meliputi :

1. Lenturan plastis : tegangan diluar kekuatan luluh tidak segera menyebabkan peluluhan dari keseluruhan penampang batan, karena tegangan-tegangan tidaklah terdistribusi secara seragam.
2. Batang-batang komposit : bahan-bahan yang berbeda digunakan dalam gabungan, misalnya beton dengan baja diperkeras *(steel reinforced concrete)* dan batang-batang bekerja berlapis.
3. Lenturan yang tidak simetris.
4. Batang-batang tetap dan kontiniu
5. Batang-batang melengkung

2.4. Balok Prismatis dan Balok Non Prismatis

Balok dengan kekakuan (EI) yang sama sepanjang bentang dinamakan balok prismatic, sehingga sepanjng bentang hanya mempunyai satu harga *EI* saja. Bila pada sepanjang benyang terdapat lebih dari satu harga *EI* maka balok tersebut disebut balok non prismatic.

E adalah modulus elastis yang mewakili karakter bahan, sedangkan *I* adalah momen inersia (terhadap garis netralnya) yang mewakili besaran penampang.

Dengan demikian ketidak-prismatisan suatu bentang mungkin disebabkan oleh perbedaan sifat material sehingga *E* berbeda, atau karena dimensinya berbeda sehingga momen inersianya berbeda. Apalagi bila materialnya diganti dan dimensinya berubah, maa besar sekali kemungkian harga kekakuan *EI* sepanjang bentang akan lebih dari satu sehingga struktur tak lagi menjadi prismatic.

2.4.1. Beban Fiktif

Beban fiktif bukan merupakan beban yang sebenarnya. Beban fiktif merupakan beban imaginer yang harus ditambahkan pada system pembebanan yang ada supaya batasan deformasi tidak berubah. Dalam kaitannya dengan garis elastis maka beban fiktif yang dimaksudkan disini akan berkaitan erat dengan persamaan bidang momen. Maka dari itu menentukan beban fiktif adalah menetukan beban yang besarnya sedemikian hingga menimbulkan momen tertentu yang megakomodasi pengaruh perbedaan *EI* disepanjang bentang.

2.5. Defleksi Elastik Balok

Dalam perancangan atau analisis balok, tegangan yang terjadi dapat ditentukan dan sifat penampang dan beban-beban uar. Pada prinsipnya tegangan pada balok akibat beban luar dapat direncanakan tidak melampaui suatu nilai tertentu, msalna tegangan ijin. Perancangan yang berdasarkan batasan teganan ini dinamakan perancangan berdasarkan kekuatan *(design for strength).*

Namun demikian, pada umumnya lendutan/defleksi balok perlu ditinjau agar titik melampaui nilai tertentu. Dapat terjadi, dari segi kekuatan balok masih mampu menahan beban, namun lendutannya cukup besar sehingga tidak nyaman lagi. Perancangan yang mempertimbangkan batasan lendutan dinamakan perancangan berdasarkan kekakuan *(design for stiffness).*

Disini akan dibahas mengenai metode finite difference untuk menghitung lendutan serta tekuk pada balok. Dalam kenyataan lendutan balok diakibatkan oleh momen lentur dan gaya geser secara bersamaan. Namun, lendutan balok yang diakibatkan oleh lentur lebih dominan dibandingkan oleh geser.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Metode *Finite Difference*

Penyelesaian numerik *Finite Difference* dapat memberikan pendekatan yang bisa diterima untuk tujuan praktis. Diantaranya teknik numerik yang dewasa ini, metode selisih hingga (*finite difference*) merupakan salah satu metode paling umum. Untuk menerapkan metode ini, turunan-turunan dalam persamaan differensial diganti dengan besaran selisih, dibeberapa titik yang dipilih.

Untuk memperoleh persamaan selisih hingga bagi turunan suatu fungsi $y = f(x)$ dalam interval tertentudidekati dengan polynominal penginterpolasi $\emptyset\ x$ dan $f'x$, $f''x$, $f'''x$ diganti $\emptyset'\ x$, $\emptyset''\ x$, $\emptyset'''\ x$ ….. Jelas bahwa pendekatan polynominal yang lebih baik bagi fungsi semula dan akan meningkatkan persaman selisih hingga yang lebih baik sehingga ketepatannya juga lebih baik.

Ada tiga jenis beda (difference) yg bisa kita gunakan utk mencari nilai f(x+Δx).Ketiga jenis beda ini disebut *forward difference, backward difference, dan central difference.*

1. ***Forward difference***

Untuk forward difference, yaitu mencari nilai suatu fungsi jika independent variablenya digeser ke depan (makanya namanya forward difference) sebesar Δx. Sederhananya, jika kita tahu f(x), maka berapakah f(x+Δx)? Ekspansi Taylor dituliskan sbb:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{\Delta x^3}{6} + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{\Delta x^n}{n!}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x = f(x+\Delta x) - f(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{\Delta x^3}{6} - \ldots - \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{\Delta x^n}{n!}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\Delta x}{2} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{\Delta x^2}{6} - \ldots - \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{\Delta x^{n-1}}{n!}$$

Gambar 3.1 Gambar Rumusan Forward Difference

Secara umum, symbol ∂f/∂x*Δx menunjukkan kemiringan (gradient) nilai fungsi f pada f(x) jika x digeser sebesar Δx. Sementara symbol ∂2f/∂x2 menunjukkan lengkungan (curvature) dari titik f(x) tsb jika x digeser sebesar Δx.

Oleh karena nilai setelah term pertama di atas tidak signifikan dibandingkan dgn term kedua, maka bisa kita bilang jika:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Hubungan di atas menunjukkan kemiringan (gradient) dari fungsi tersebut sebesar Δx ke depan (lebih besar dari x).

2. *Backward difference*

Ekspansi Taylor dituliskan sbb:

$$f(x-\Delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}(-\Delta x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{(-\Delta x)^2}{2} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{(-\Delta x)^3}{6} + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{(-\Delta x)^n}{n!}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x = f(x) - f(x-\Delta x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{\Delta x^3}{6} + \ldots - \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{\Delta x^n}{n!}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\Delta x}{2} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{\Delta x^2}{6} + \ldots - \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{\Delta x^{n-1}}{n!}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

Gambar 3.2 Gambar Rumusan Backward Difference

Hubungan terakhir ini menunjukkan kemiringan (gradient) dari fungsi tersebut sebesar Δx ke belakang (lbh kecil dari x).

3. *Central difference*

Jenis ketiga adalah beda tengah, dimana mencari kemiringan dari fungsi tersebut dengan menggunakan perbedaan nilai fungsinya dari beda depan dan beda belakang. Secara matematis, beda tengah adalah penjumlahan dari beda depan dan beda belakang.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

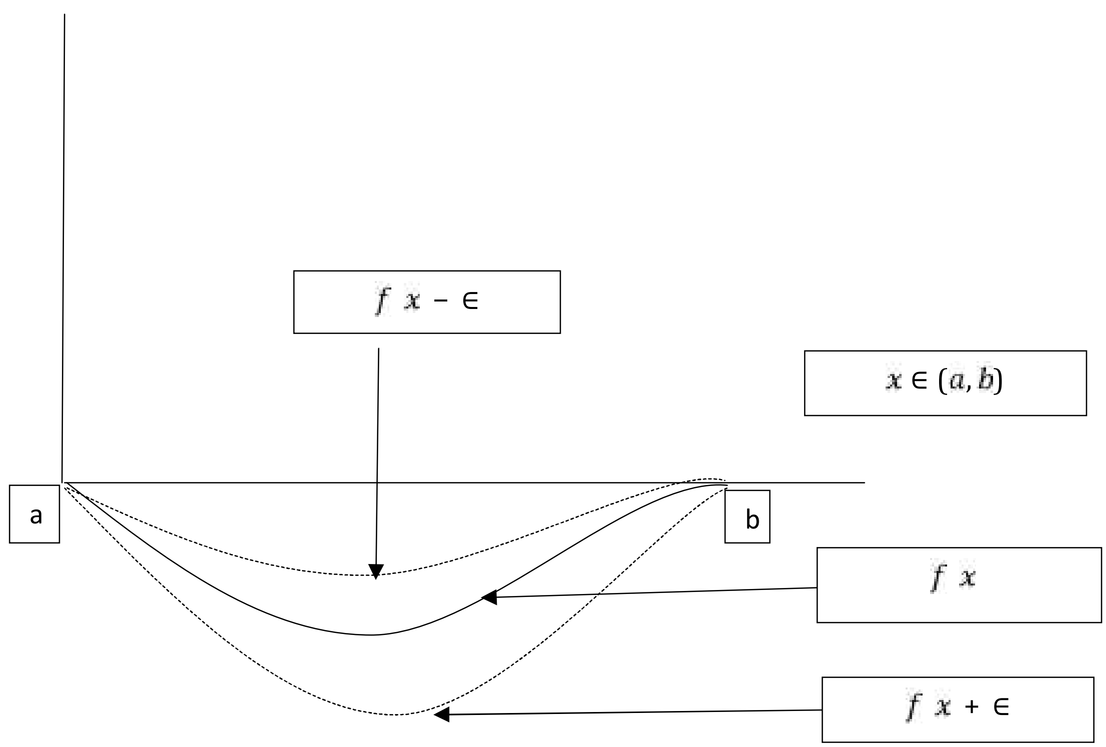
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\text{-----------------------} \quad +$$

$$2\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Gambar 3.3 Gambar Rumusan Central Difference



Gambar 3.4 Grafik fungsi besaran simpangan

Seperti tergambar, berturut-turut merupakan fungsi 3 asli ɛadalah besaran simpangan dan f(x) menyatakan batasan fungsi. Didalam batasan antara f(x)-ɛditentukan fungsi polynominal atau fungsi trigonometri dimana xɛ(a,b) berapapun kecilnya ɛ, ini berarti fungsi dapat dinyatakan dengan fungsi dan pengganti dengan tingkat ketelitian tertentu (dibuat ɛtertentu)

Apabila, *yo,y1,y2,….,yn* merupakan satu set nilai dari sembarang fungsi f(x), maka :

$$\Delta\, y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta\, y_1 = y_2 - y_1$$

$$\Delta\, y_2 = y_3 - y_2$$

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$$

Perbedaan tingkat pertama (first difference) dari fungsi tersebut :

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - y_1 - y_0$$

$$= y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - y_2 - y_2 - y_1$$

$$= y_3 - 2y_2 + y_1$$

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

Perbedaan tingkat kedua (second difference) dari fungsi tersebut :

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$$

$$= y_3 - 2y_2 + y_1 - y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

$$\Delta^3 y_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$$

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
y_0				
	$y_1 - y_0$			
y_1		$y_2 - 2y_1 + y_0$		$y_3 - 4y_2 + 6y_1 - 4y_0 - y_{-1}$
	$y_2 - y_1$		$y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$	
y_2		$y_3 - 2y_2 + y_1$		$y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 - y_0$
	$y_3 - y_2$		$y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$	
y_3		$y_4 - 2y_3 + y_2$		$y_5 - 4y_4 + 6y_3 - 4y_2 - y_1$
	$y_4 - y_3$		$y_5 - 3y_4 + 3y_3 - y_2$	
y_4		$y_5 - 2y_4 + y_3$		$y_6 - 4y_5 + 6y_4 - 4y_3 - y_2$
	$y_5 - y_4$		$y_6 - 3y_5 + 3y_4 - y_3$	
y_5		$y_6 - 2y_5 + y_4$		...
	$y_6 - y_5$		...	
y_6		...		...
	...		...	
...		..		...

$$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 - y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

$$= y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 - y_3 + 3y_2 - 3y_1 + y_0$$

$$= y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 - y_0$$

3.2 Taylor series

$$f\ x_i = f\ x_{i-1} + \frac{h^2}{2} f\ x_{i-1} + \text{⍰}.f'\ x_{i-1}$$

$$f\ x_i = f\ x_{i-1} + \text{⍰}.f'\ x_{i-1}$$

Maka diperoleh :

$$y_1{}' \simeq \frac{y_2 - y_1}{h} \leftarrow Two\,point\,forward$$

$$y_1' \simeq \frac{y_1 - y_0}{h} \leftarrow Two\, point\, backward$$

$$y_1' \simeq \frac{y_2 - y_0}{2h} \leftarrow Two\, point\, central$$

Turunan kedua :

$$y_1'' \simeq \frac{y'_2 - y'_1}{h^2} = \frac{y_2 - y_1 - (y_1 - y_0)}{h^2}$$

$$y_1'' = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}$$

Turunan ketiga :

$$y_1''' \simeq \frac{y''_2 - y''_1}{h^3} = \frac{y_3 - 2y_2 + y_1 - (y_2 - 2y_1 + y_0)}{h^3}$$

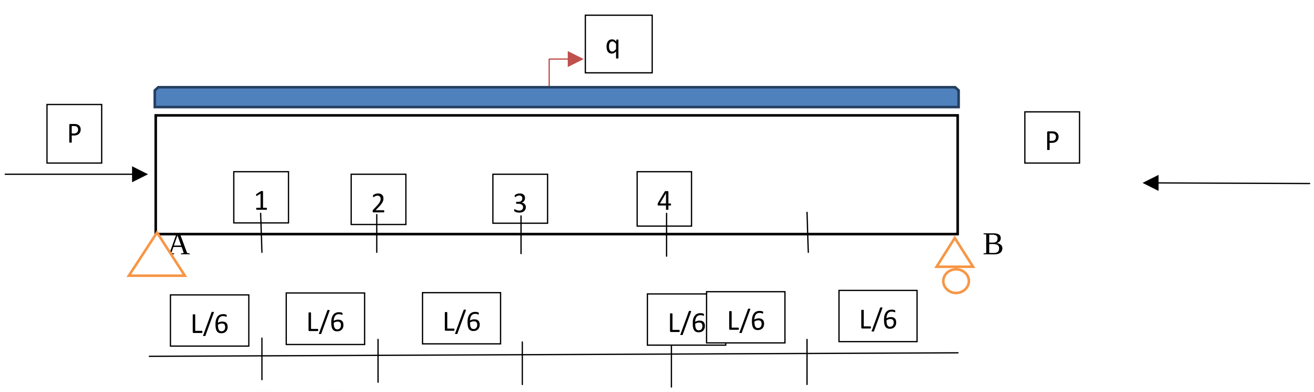
$$= \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{h^3}$$

Turunan keempat :

$$y_1'''' \simeq \frac{y'''_2 - y'''_1}{h^4} = \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 - (y_2 - 3y_1 + 3y_0 + y_{-1})}{h^4}$$

$$= \frac{y_3 - 4y_2 + 6y_1 - 4y_0 - y_{-1}}{h^4}$$

3.3 Aplikasi Finite Difference pada Balok-Kolom



BC : $y_0 = y_6 = 0$

$y_1 = y_5$

$y_2 = y_4$

h $= \frac{L}{6}$

Persamaan Keseimbangan :

$$\mathrm{E}I y'' + p.y = -Mx$$

$$y'' + \frac{P}{\mathrm{E}I} = -\frac{Mx}{\mathrm{E}I}$$

$$y'' + \lambda.y = -\frac{Mx}{\mathrm{E}I} \leftarrow \lambda = \frac{P}{\mathrm{E}I}$$

Peninjauan Momen

$$M_x = \frac{1}{2} q\, L\, x - \frac{1}{2} q\, x^2$$

x = 0 → M_0 = 0

x = $\frac{L}{6}$ → M_1 $= -\frac{1}{2}\, q\, L\, (\frac{L}{6}) - \frac{1}{2}\, q\, \frac{L}{6}^{\,2} = \frac{ql^2}{12} - \frac{ql^2}{72} = \frac{5ql^2}{72}$

x = $\frac{L}{3}$ → M_2 $= -\frac{1}{2}\, q\, L\, (\frac{L}{3}) - \frac{1}{2}\, q\, \frac{L}{3}^{\,2} = \frac{ql^2}{6} - \frac{ql^2}{18} = \frac{ql^2}{9}$

x = $\frac{L}{2}$ → M_3 $= -\frac{1}{2}\, q\, L\, (\frac{L}{2}) - \frac{1}{2}\, q\, \frac{L}{2}^{\,2} = \frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}$

Titik 1

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + \lambda y_1 = -\frac{5ql^2}{72EI}$$

$$y_2 - 2y_1 + \lambda \square^2 y_1 = -\frac{5ql^2h^2}{72EI}$$

$$y_2 - 2y_1 + \lambda \square^2 y_1 = -\frac{5ql^2\square^2}{72EI}$$

$$\lambda \square^2 - 2\; y_1 + y_2 = -\frac{5ql^2h^2}{72EI}$$

Titik 2

$$\frac{y_3-2y_2+y_1}{h^2} + \lambda y_2 = -\frac{ql^2}{9EI}$$

$$y_3 - 2y_2 + \lambda h^2 y_2 = -\frac{ql^2}{9EI}$$

$$y_1 + (\lambda h^2 - 2)y_2 + y_3 = -\frac{ql^2}{9EI}$$

Titik 3

$$\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{h^2} + \lambda y_3 = -\frac{ql^2}{8EI}$$

$$2y_2 - 2y_3 + \lambda h^2 y_3 = -\frac{ql^2}{8EI}$$

$$2y_2 + (\lambda h^2 - 2)y_3 = -\frac{ql^2}{8EI}$$

Persamaan ditulis dalam bentuk matriks dan memisalkan $\lambda h^2 = x$

$$\begin{matrix} (x-2) & 1 & 0 \\ 1 & (x-2) & 1 \\ 0 & 2 & (x-2) \end{matrix} \quad \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} = \begin{matrix} -\frac{5}{72} \\ -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{8} \end{matrix} \quad \frac{ql^2}{EI}$$

a. Alternatif 1, q = 0

   Persamaan menjadi PD Homogen

$$\begin{matrix} (x-2) & 1 & 0 \\ 1 & (x-2) & 1 \\ 0 & 2 & (x-2) \end{matrix} \quad \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \frac{ql^2}{EI}$$

Menentukan determinan dengan kolom pertama

$c_{11} = \ + \ \begin{matrix} (x-2) & 1 \\ 2 & (x-2) \end{matrix}$

$= \ x - 2 \ ^{2} - 2$

$= x^{2} - 4x + 2$

$c_{21} = \ - \ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & (x-2) \end{matrix}$

$= -x + 2$

$c_{31} = \ -1$

$|D| = 0 \rightarrow \ |D| = \ a_{11}.c_{11} + \ a_{21}.c_{21} + \ a_{31}.c_{31} = \ 0$

$|D| = \ \ x - 2 \ \ x^{2} - 4x + 2 \ + 1 \ -x + 2 \ + 0.1 = \ 0$

$= \ x^{3} - \ 4x^{2} + 2x - \ 2x^{2} + \ 8x - \ 4 - \ x + \ 2 = \ 0$

$= \ x^{3} - \ 6x^{2} + \ 9x - \ 2 = \ 0$

Diselesaikan dengan cara newton

$f \ \ x \ \ = \ x^{3} - \ 6x^{2} + \ 9x - \ 2$

$f' \ \ x \ \ = \ 3x^{2} - \ 12x + \ 9$

$X_{n+1} = \ X_{n} - \ \frac{f \ x_{n}}{f'(x_{n})}$

Iterasi	X_n	$f(X_n)$	$f'(X_n)$	X_{n+1}
1	0,2	-0.432	6,720	0.26428
2	0.26428	-0.02208	6,308171	0,26778
3	0.26778	-0.00101	6.00175	0.26794
4	0.26794	-0.00005	6.00009	0.26794

Diperoleh : x = 0,26794

Maka $\lambda ?^2 = \frac{P}{EI} ?^2 = x$

$P = \frac{x.EI}{h^2} = \frac{0{,}26794\ .EI}{(\frac{L}{6})^2}$

$= 0{,}26794\ .\ 36\ .\frac{EI}{L^2} \cdot \frac{\pi^2}{(3{,}14)}$

$P_{cr} = 0.9784\ \frac{\pi^2 EI}{L^2} \leq\ \ P_{cr\ analitis} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

b. Alternatif 2, P = 0

Persamaannya menjadi :

$$\begin{matrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} = \begin{matrix} -\frac{5}{72} \\ -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{8} \end{matrix} \quad \frac{ql^2}{EI}$$

Eliminasi Gauss Method

$$\begin{matrix} -2 & 1 & 0 & -0{,}0694 \\ 1 & -2 & 1 & -0{,}1111 \\ 0 & 2 & -2 & -0{,}125 \end{matrix} \quad b_1 + 2b_1 \rightarrow \quad \begin{matrix} -2 & 1 & 0 & -0{,}0694 \\ 0 & -3 & 2 & -0{,}2916 \\ 0 & 2 & -2 & -0{,}125 \end{matrix} \quad 2b_2 + 3b_3$$

$$\rightarrow \begin{matrix} -2 & 1 & 0 & -0{,}0694 \\ 0 & -3 & 2 & -0{,}2916 \\ 0 & 0 & -2 & -0{,}9582 \end{matrix}$$

Didapat : $-2y_3 = -0{,}9582\ \frac{ql^2}{EI}$

$y_3 = 0{,}4791\ \frac{ql^2}{EI}$

$$-3y_2 + 2y_3 = -0{,}2916\ \frac{ql^2}{EI}$$

$$-3y_2 = -\ 0{,}2996\ \frac{ql^2}{EI} - \ 2(0{,}4791\ \frac{ql^2}{EI})$$

$$-3y_2 = -1{,}2498\ \frac{ql^2}{EI}$$

$$y_2 = \ 0{,}4166\ \frac{ql^2}{EI}$$

$$-2y_1 + 2y_2 = -0{,}0694\ \frac{ql^2}{EI}$$

$$-2y_1 = -\ 0{,}0694\ \frac{ql^2}{EI} - \ 0{,}4166\ \frac{ql^2}{EI})$$

$$-2y_1 = -0{,}486\frac{ql^2}{EI}$$

$$y_2 = \ 0{,}243\frac{ql^2}{EI}$$

Check/ Uji Kebenaran

Substitusikan harga-harga tersebut pada persamaan :

$$2y_2 - \ 2y_3 = -0{,}125\frac{ql^2}{EI}$$

$$2(0{,}4166\frac{ql^2}{EI}) - \ 2\ (0{,}4791\frac{ql^2}{EI})\ = -\ 0{,}125\frac{ql^2}{EI}$$

$$0{,}8332\frac{ql^2}{EI} - \ 0{,}9582\ \frac{ql^2}{EI} = -0{,}125\ \frac{ql^2}{EI}$$

$$-0{,}125\frac{ql^2}{EI} = -\ 0{,}125\ \frac{ql^2}{EI}$$

Maka didapat :

$$y_3 = 0{,}4791\,\frac{ql^2}{EI} = 0{,}4791\,\frac{ql^2(\frac{l}{6})^2}{EI}$$

$$= 0{,}0133\frac{ql^4}{EI} > y_{\max analitis} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}$$

$$= 0{,}01302\frac{ql^4}{EI}$$

Jadi $y_3 = 0{,}0133\,\frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{1}{0.01302}\frac{ql^4}{EI}$

$= 1{,}02\, y_{m\, analitis} \leftarrow sesatan \pm 2{,}1\%$

Check harga tersebut dengan mensubstitusikan pada persamaan diatas

$$2y_2 - 1{,}729\,y_3 = -0{,}125\frac{ql^2}{EI}$$

$$2(-36{,}567\frac{ql^2}{EI}) - 1{,}729\,(42{,}226\frac{ql^2}{EI}) = -\,0{,}125\frac{ql^2}{EI}$$

$$-73{,}124\,\frac{ql^2}{EI} - 73{,}008\,\frac{ql^2}{EI} = -0{,}125\,\frac{ql^2}{EI}$$

$$-0{,}126\,\frac{ql^2}{EI} \square -\,0{,}125\,\frac{ql^2}{EI}$$

Dengan :

$$Q = \frac{ql^2\square^2}{EI_x} = \frac{ql^2(\frac{l}{6})^2}{EI_x} = \frac{ql^4}{36EI_x}$$

$$= \frac{15\ \ 600^{\ 4}}{36\,(2{,}1.10^{6)}(644700)} = 0{,}04\ cm$$

Maka didapat :

$$y_3 = \ -21{,}009\,Q = \ -21{,}009 \ \ 0{,}04$$

$$= -0{,}844\ cm$$

$$y_3 = \ -21{,}009\,Q = \ -21{,}009 \ \ 0{,}04$$

$$= -1{,}463\ cm$$

$$y_3 = \ -21{,}009\,Q = \ -21{,}009 \ \ 0{,}04$$

$$= -1{,}690\ cm$$

Akhirnya :

$$\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} = \begin{matrix} -0{,}844 \\ -1{,}463 \\ -1{,}690 \end{matrix}\ cm$$